

N° D'ORDRE

51

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PAR

**ZOÁRD DE GEÖCZE**

PROFESSEUR À L'ÉCOLE RÉALE D'UNGVAR, ROYAUME HONGRIE

1<sup>RE</sup> THÈSE. QUADRATURE DES SURFACES COURBES

2<sup>RE</sup> THÈSE. PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

SOUTENUES LE *juillet* 1910 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. E PICARD, PRÉSIDENT

PUISEUX,

HADAMARD,

} EXAMINATEURS

---

IMPRIMERIE B. G. TEUBNER, LEIPZIG, 1909



N° D'ORDRE

51

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PAR

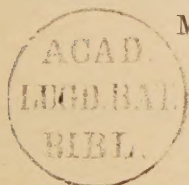
**ZOÁRD DE GEÖCZE**

PROFESSEUR À L'ÉCOLE RÉALE D'UNGVAR, ROYAUME HONGRIE

1<sup>RE</sup> THÈSE. QUADRATURE DES SURFACES COURBES

2<sup>E</sup> THÈSE. PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

SOUTENUES LE *8 avril* 1910 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN



MM. E. PICARD, PRÉSIDENT

PUISEUX,

HADAMARD,

} EXAMINATEURS

---

IMPRIMERIE B. G. TEUBNER, LEIPZIG, 1909

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

*Doyen* ..... P. APPELL, *Prof.* Mécanique rationnelle.

*Doyen honoraire* G. DARBOUX, — Géométrie supérieure.

*Professeurs hono-* { L. TROOST.  
*raires* { CH. WOLF.  
J. RIBAN.

*Professeurs* ..... { LIPPMMANN ..... Physique.  
BOUTY ..... Physique.  
BOUSSINESQ ... Physique mathém. et calcul des probabilités.  
PICARD ..... Analyse supérieure et algèbre supérieure.  
H. POINCARÉ... Astronomie mathém. et mécanique céleste.  
Y. DELAGE ... Zoologie, anatomie, physiologie comparée.  
G. BONNIER... Botanique.  
DASTRE ..... Physiologie.  
KËNIGS ..... Mécanique physique et expérimentale.  
VÉLAIN ..... Géographie physique.  
GOURSAT ..... Calcul différentiel et calcul intégral.  
CHATIN ..... Histologie.  
PELLAT ..... Physique.  
HALLER ..... Chimie organique.  
JOANNIS ..... Chimie (Enseignement P. C. N.).  
JANET ..... Physique (Enseignement P. C. N.).  
WALLERANT ... Minéralogie.  
ANDOYER ..... Astronomie physique.  
PAINLEVÉ ..... Mathématiques générales.  
HAUG ..... Géologie.  
TANNERY ..... Calcul différentiel et calcul intégral.  
RAFFY ..... Application de l'analyse à la géométrie.  
HOUSSAY ..... Zoologie.  
H. LE CHATELIER Chimie.  
GABR. BERTRAND Chimie biologique.  
Mme. P. CURIE Physique générale.  
CAULLERY ..... Zoologie (Évolution des êtres organisés).  
C. CHABRIÉ... Chimie appliquée.  
G. URBAIN ... Chimie.  
E. BOREL ..... Théorie des fonctions.  
N ..... Zoologie, anatomie, physiologie comparée.

*Professeurs ad-* { PUISEUX ..... Mécanique et astronomie.  
*jointes* ..... { LEDUC ..... Physique.  
HADAMARD ... Calcul différentiel et calcul intégral.  
MATRUCHOT ... Botanique.  
MICHEL ..... Minéralogie.  
G. PRUVOT ... Anatomie comparée.

*Secrétaire* . .... A. GUILLET.

A

MONSIEUR E. PICARD

MEMBRE DE L'INSTITUT

HOMMAGE AFFECTUEUX ET RECONNAISSANT

Z. GEÖCZE



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

## PREMIÈRE THÈSE.

---

### QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

#### Introduction.

Il y a quatre quantités géométriques dont les mesures sont importantes en pratique: ce sont l'aire des figures planes, le volume des corps, la longueur des lignes courbes et l'aire des surfaces courbes.

En pratique ces quantités sont suffisamment connues. Au point de vue mathématique on ne peut affirmer qu'il en soit ainsi que pour les trois premières.

Tandis que dans les trois premiers cas nos connaissances dépassent le domaine du calcul différentiel et intégral, dans le quatrième elles lui sont intimement liées.

On peut diviser les définitions données jusqu'au commencement de ce siècle, pour l'aire des surfaces courbes, en quatre groupes.

1. On inscrit dans la surface une série de polyèdres à faces triangulaires, en assujettissant ces polyèdres et ces faces à satisfaire à certaines conditions. Ces conditions, qui varient avec les auteurs, sont étroitement liées à la régularité de la surface. La limite vers laquelle tend l'aire de ces polyèdres, lorsque le nombre de leurs faces croît indéfiniment, est représentée par une intégrale double, et cette limite est définie comme l'aire de la surface courbe.

2. On partage arbitrairement la surface courbe en un nombre fini de portions et on transporte, sans déformation, chacun de ces éléments dans une position arbitraire. Soit  $U$  la somme des

aires\* des projections orthogonales de ces portions sur un plan invariable. On définit la limite supérieure de tous les  $U$  possibles comme l'aire de la surface courbe.

3. On décrit des sphères ayant pour centre les points de la surface et comme rayon une longueur  $r$ . Soit  $V$  le volume de la figure formée par les points intérieurs au moins à l'une de ces sphères. L'aire de la surface courbe sera définie comme la limite de la quantité  $\frac{V}{2r}$  quand  $r$  tend vers zéro, si toutefois cette limite existe.

4. Divisons la surface considérée, d'une manière arbitraire, en un nombre fini de portions et ajoutons à chacun de ces éléments un polygone plan qui sera en générale un parallélogramme. Soit  $S$  la somme des aires de ces polygones; faisons tendre vers zéro les dimensions linéaires des portions de la surface. On définit son aire comme la limite de  $S$ .

Il arrive quelquefois, et c'est en particulier le cas pour les surfaces de révolution, qu'au lieu de polygones plans, on emploie des portions de surfaces courbes dont l'aire peut être défini comme nous l'avons fait en premier lieu.

Quelquefois même, au lieu de polygones plans, on ajoute une aire plane limitée par une seule courbe fermée.

Chacune de ces définitions a ses avantages. Mais, ou on ne peut employer ces définitions que pour les surfaces régulières, ou, comme la troisième définition, elles ne furent employés jusqu'ici qu'à de telles surfaces.

Le but de ce travail, est de donner de l'aire une définition que l'on puisse appliquer à toutes les surfaces, d'achever la quadrature de deux classes de la surface  $z = f(x, y)$  d'après la définition donnée, et de préparer la quadrature de la surface générale  $z = f(x, y)$ .\*\*

\* Ou plus exactement la somme des mesures intérieurs dans le sens de M. JORDAN. Cours d'analyse (2), Paris 1893, 1, p. 28.

\*\* Dans sa thèse de doctorat Über einige stetige Kurven, über Bogenlänge, linearen Inhalt und Flächeninhalt (Königsberg, 1907), M. JANZEN donne une nouvelle définition pour l'aire; il me paraît que cette définition soit équivalente avec celle de l'invariant du Chap. XII, d'ailleurs M. JANZEN ne

## Chapitre I.

## Définition de l'aire d'une surface courbe.

Toutes les figures dont nous allons parler sont situées dans l'espace d'EUCLIDE à trois dimensions. Nous prendrons pour unité d'aire des polygones plans celle du carré dont le côté est égal à l'unité de longueur, cette dernière étant choisie d'ailleurs arbitrairement.

Soient  $x, y, z$ , les coordonnées rectangulaires courantes, et soient

$$f^{(h)}(x, y), \quad (h = 1, 2, 3),$$

des fonctions bornées, uniformes et continues définies dans le rectangle  $(0, a; 0, b) - P -$  du plan  $xy$ .\*

Considérons un nouveau système d'axes de coordonnées rectangulaires  $\xi, \eta, \zeta$ .

Envisageons la figure formée par les points dont les coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  sont égaux à

$$f^{(1)}(x, y), \quad f^{(2)}(x, y), \quad f^{(3)}(x, y).$$

On peut regarder cette figure sous deux points de vue différents. Premièrement, on la regarde comme un ensemble des points, les fonctions  $f^{(h)} (h = 1, 2, 3)$  ne servant qu'à construire la figure; deuxièmement, on la regarde aussi comme un ensemble des points, mais on tient toujours compte des fonctions  $f^{(h)}$ .

Nous conservons ce deuxième point de vue et nous l'interprétons de la manière suivante:

„En donnant un point  $\xi, \eta, \zeta$ , de la figure, nous donnons aussi un procédé, tel qu'il désigne au moins une couple des valeurs  $x, y$ , pour laquelle on ait

$$\xi = f^{(1)}(x, y), \quad \eta = f^{(2)}(x, y), \quad \zeta = f^{(3)}(x, y)."$$

démontre que, lorsque  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$  sont bornées et continues, sa définition conduit à la valeur de

$$\iint (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

\* En écrivant  $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ , nous supposons que  $x_1 < x_2$ ,  $y_1 < y_2$ .  $(x_1, x_2; y_1, y_2)$  désigne le rectangle formé par les lignes  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ ,  $y = y_1$ ,  $y = y_2$ , dans le plan  $xy$ .

Sous ce point de vue nous disons que la figure est une surface; nous la désignerons par  $R$ .

Soit  $w_s \geq 0$ , ( $s = 1, 2, \dots$ ),  $\lim_{s=\infty} w_s = 0$ , et soient

$$f_s^{(h)}(x, y), \quad (h = 1, 2, 3; \quad s = 1, 2, \dots)$$

des fonctions bornées, uniformes et continues au domaine  $P$ , et telles que

$$|f^{(h)}(x, y) - f_s^{(h)}(x, y)| \leq w_s.$$

Les équations

$$\xi = f_s^{(1)}(x, y), \quad \eta = f_s^{(2)}(x, y), \quad \zeta = f_s^{(3)}(x, y),$$

définissent donc une surface  $R_s$ .

Soit  $\delta_s > 0$ ,  $\lim_{s=\infty} \delta_s = 0$ . Inscrivons dans la surface  $z = f_s^{(3)}(x, y)$  une surface polyédrale  $\mathcal{A}_s^{(3)}$  qui, formée de faces triangulaires en nombre fini, ait les propriétés suivantes:

1. Elle est simplement connexe. Son contour se déduit de celui de  $z = f_s^{(3)}(x, y)$  par une déformation continue, de manière que les points pendant le mouvement ne s'éloignent jamais plus loin que  $\delta_s$  du contour de  $z = f_s^{(3)}(x, y)$ .

2. Ses arêtes sont toutes plus petites que  $\delta_s$ .

On voit qu'on obtient  $\mathcal{A}_s^{(3)}$  par une déformation continue de  $z = f_s^{(3)}(x, y)$  le contour se déformant selon la manière décrite.

Inscrivons dans  $R_s$  le polyèdre correspondant  $\mathcal{A}_s$ . C'est à dire que, le point  $A_i^{(3)}$  dont les coordonnées  $x, y$ , sont  $x^{(i)}, y^{(i)}$ , étant un sommet de  $\mathcal{A}_s^{(3)}$ ,  $\mathcal{A}_s$  aura le sommet  $A_i$  dont les coordonnées sont

$$\xi = f_s^{(1)}(x^{(i)}, y^{(i)}), \quad \eta = f_s^{(2)}(x^{(i)}, y^{(i)}), \quad \zeta = f_s^{(3)}(x^{(i)}, y^{(i)}),$$

et  $A_j$  étant un autre sommet de  $\mathcal{A}_s$  (correspondant au sommet  $A_j^{(3)}$  de  $\mathcal{A}_s^{(3)}$ ),  $\overline{A_i A_j}$  sera une arête de  $\mathcal{A}_s$  lorsque  $\overline{A_i^{(3)} A_j^{(3)}}$  est une arête de  $\mathcal{A}_s^{(3)}$  — et il ne la sera que dans ce cas.

On sait qu'on peut trouver des fonctions

$$F_s^{(h)}(x, y) \quad (h = 1, 2, 3; \quad s = 1, 2, \dots),$$

bornées, uniformes et continues au domaine  $P$ , telles que la figure

$\xi = F_s^{(1)}(x, y), \eta = F_s^{(2)}(x, y), \zeta = F_s^{(3)}(x, y),$   
coïncide avec  $\mathcal{A}_s$ .

Soit  $\lambda_s^{(h)}$ , la limite supérieure de

$$|f^{(h)} - F_s^{(h)}|.$$

Il est évident que quelque soit la choix des fonctions  $F_s^{(h)}$ , on a en général

$$\lim_{s=\infty} \lambda_s^{(h)} \neq 0.$$

Considérons tous les suites  $w_s, \delta_s$  qui peuvent exister ( $\lim w_s = \lim \delta_s = 0$  ( $s = \infty$ )), et considérons tous les suites  $\mathcal{A}_s$  qu'on peut construire.

Soit I l'ensemble dont les éléments sont les suites  $\mathcal{A}_s$ . Cet ensemble contient plusieurs autres ensembles qui sont moins étendus.

Le plus remarquable est celui, où l'on peut choisir les  $F_s^{(h)}$  de sorte que pour chaque élément on ait

$$\lim_{s=\infty} \lambda_s^{(h)} = 0.$$

Nous désignerons cet ensemble par II.

Soit III l'ensemble, dont les éléments sont caracterisés par

$$w_s = 0.$$

IV désigne l'ensemble qui est la partie commune de II et III. Soit V l'ensemble contenu dans IV et tel que les  $\mathcal{A}_s^{(3)}$  de chacun de ces éléments n'ont pas des faces qui se coupent. Enfin soit VI l'ensemble contenu dans IV et tel que  $\mathcal{A}_s^{(3)}$  n'est coupé qu'en un seul point par une droite normale au plan  $xy$ .

Désignons par  $\mathcal{A}_s t$  l'aire de  $\mathcal{A}_s$ .

On sait que pour chacun de ces ensembles, il existe au moins un élément, tel que pour cet élément  $\lim_{s=\infty} \mathcal{A}_s t$  soit déterminée, et entre ces limites déterminées il existe un minimum.

Désignons par  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$  ces plus petites des limites.

On prouve facilement que

$$T_2 = T_1.$$

Ainsi III étant compris dans I

$$T_2 < T_3.$$

IV étant compris dans III, V dans IV, VI dans V, on obtient enfin

$$T_1 = T_2 < T_3 < T_4 < T_5 < T_6.$$

De telle sorte, quoique peu probable, il n'est pas impossible que pour certaines surfaces on ait  $T_3 = +\infty$ , tandis que  $T_2$  ait une valeur finie.

La quantité  $T_2$  fut définie comme l'aire d'une surface courbe par M. LEBESGUE en 1902.\* L'auteur, ne connaissant pas les travaux de M. LEBESGUE, choisissait  $T_3$  en 1906.

En adoptant l'une quelconque des valeurs  $T_1, \dots, T_6$  comme définition de l'aire on peut poser trois questions.

I. Quelles sont les surfaces à aire finie?

II. Comment obtient-on la valeur de l'aire, à l'aide des fonctions  $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ ?

III. Comment doit-on construire la suite  $\mathcal{A}_s$ , pour que  $\lim_{s=\infty} \mathcal{A}_s t$  soit égale à l'aire? (quadrature).

Note. En adoptant  $T_3$  pour définition, il est très probable qu'étant donné un ensemble dénombrable de points situés sur  $R$ , la suite  $\mathcal{A}_s$ , pour laquelle  $\lim \mathcal{A}_s t = T_3$ , peut être telle qu'il existe pour chaque point de cet ensemble un nombre entier  $k$  (fini mais accidentellement assez grand) de manière que ce point soit un sommet de chacun des  $\mathcal{A}_s$ , si  $s \geq k$ .

Considérons la surface

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = f^{(3)}(x, y),$$

que nous désignerons couramment par  $z = f(x, y)$ .

Nous indiquerons sans démonstration les conditions nécessaires et suffisantes, pour que l'aire  $(T_1, \dots, T_6)$  de  $f$  soit finie, et nous achèverons la quadrature de deux classes de la surface  $z = f(x, y)$ .

La première d'entre elles jouit de la propriété suivante: les longueurs des sections  $x = \text{const.}$   $y = \text{const.}$  sont toutes inférieures à une limite finie que nous désignerons par  $\bar{S}$ , et il existe un

\* Thèse. Intégrale, Longueur, Aire. p. 71 et 72.

nombre positif  $G$  tel que,  $y_1 - y$  étant différent de zéro, on ait

$$\left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{y_1 - y} \right| < G.*$$

La définition de la deuxième classe sera donnée dans la suite de cette étude, et l'aire sera, dans ce cas, représentée par une intégrale double.

Dans ces deux cas nous aurons

$$T_1 = T_6 = t$$

$t$  étant une certaine quantité (voir Chap. VI) facile à former.

Après cela nous décrirons brièvement la quadrature de la surface générale  $z = f(x, y)$ , mais nous remarquons, que nous n'avons pu démontrer autre chose que l'équation

$$T_1 = T_4 = t.$$

Enfin nous indiquerons la quadrature de la surface rectifiable; chez cette classe des  $R$  on a

$$T_1 = T_6.$$

Dans le Chapitre II nous allons expliquer l'emploi de quelques notations, dont l'usage nous paraît être de grand utilité.

## Chapitre II.

### Division de l'intervalle et du rectangle. Formation des limites.

#### Suite de divisions à quotient fini.

1. Nous dirons que les points

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_l = a$$

forment une division  $X_l$  de l'intervalle  $(0, a)$ , le nombre  $l$  étant, bien entendu, fini. Les points  $x_i$  sont les points diviseurs de la division, les intervalles  $(x_i, x_{i+1})$  en sont les intervalles.

2. Nous dirons qu'une suite de divisions  $X_{l_1}, X_{l_2}, \dots, X_{l_r}, \dots$  est une suite de première espèce, lorsque les points de  $X_{l_r}$  se trouvent parmi les points de  $X_{l_{r+1}}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ).

3. Etant donnée une suite de divisions, de première espèce ou non,  $X_{l_1}, X_{l_2}, \dots$ , nous supposerons qu'il corresponde à chaque

---

\* Il résulte de cette condition, connue sous le nom de condition de LIPSCHITZ, que les longueurs des sections  $x = \text{const.}$  sont plus petites que  $(1 + G^2)^{\frac{1}{2}} \cdot b$ .

nombre  $\lambda > 0$  un nombre entier positif  $k$ , tel que si  $r > k$ , les longueurs des intervalles de  $X_{i_r}$  soient plus petites que  $\lambda$ .

4. Etant donnée une division  $X_i$ , nous ferons correspondre à chaque intervalle  $(x_i, x_{i+1})$  de  $X_i$  une valeur  $[i]$ . La somme de ces valeurs, en nombre  $l$ , sera désignée par  $X_i[i]$ .

5. Etant donnée une suite de divisions  $X_{i_r}$ , nous désignerons  $\lim_{r=\infty} X_{i_r}[i]$  par  $X_{i_\infty}[i]$ , et, si  $X_{i_\infty}[i]$  est indépendant de la suite des divisions, nous désignerons cette quantité par  $X[i]$ .

6. Soit  $0 \leq u < v \leq a$  et soit  ${}^u X_{i_r}^{v'}[i]$  la somme des  $[i]$ , dont les intervalles correspondants  $(x_i, x_{i+1})$  sont contenus dans  $(u, v)$ , et  ${}^u X_{i_r}^{v''}[i]$  la somme des  $[i]$  dont les intervalles correspondants ont au moins un point commun avec  $(u, v)$ .

Lorsque

$$\lim_{r=\infty} {}^u X_{i_r}^{v'}[i] = \lim_{r=\infty} {}^u X_{i_r}^{v''}[i]$$

nous désignerons cette valeur par  ${}^u X_{i_\infty}^v[i]$ , et lorsque  ${}^u X_{i_\infty}^v[i]$  sera indépendante de la suite de divisions, nous la désignerons simplement par  ${}^u X^v[i]$ .

7. Nous dirons qu'une division de  $(0, a)$  a le quotient (égal ou supérieur à)  $u$ , lorsque le quotient des longueurs de deux intervalles quelconques de la division est plus grand que  $u$ . Ces quotients sont donc tous plus petits que  $\frac{1}{u}$ , et  $u$  est nécessairement  $\leq 1$ .

8. Nous dirons que la suite de divisions  $X_{i_r}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) a un quotient fini, lorsqu'il existe un nombre  $u > 0$ , tel que chaque division de la suite ait un quotient  $u$ .

9. Etant donné un ensemble  $X$  de points, en nombre fini, situés sur  $(0, a)$ , on peut former une suite de divisions de première espèce  $X_{i_r}$ , ayant le quotient  $\frac{1}{2}$ , de manière que  $X_{i_n}$  contienne  $X$  — c'est à dire que les points de  $X$  se trouvent parmi les points de  $X_{i_n}$ .

Partageons l'intervalle  $(0, a)$  en parties égales, de manière qu'entre deux points quelconques voisins de  $X$ , il y ait au moins cinq parties égales. Les points de  $X_{i_n}$  seront les points de  $X$  et les extrémités des intervalles égaux, sauf celles qui sont voisines des

points de  $X$ .  $X_{l_2}$  se construit de la même manière à l'aide des points de  $X_{l_1}$ .

10. Soit  $\frac{1}{2}$  le quotient de  $X_r$ . Prenons dans chacun des intervalles  $(x_2, x_3), (x_4, x_5) \dots (x_{2s}, x_{2s+1})$  ( $2s+1 \leq l-1 < 2s+2$ ) de  $X_l$  un point d'ailleurs arbitraire. La division formée par ces points aura le quotient  $\frac{1}{6}$ .

11. Etant donnée une division  $X_n$  de  $(0, a)$  si nous formons une division  $X_{n'}$ , au quotient  $\frac{1}{2}$  et contenant  $X_n$  (No. 9), et si de  $X_{n'}$  nous déduisons la division  $X_l$  au quotient  $\frac{1}{6}$  et contenant  $X_n$  (No. 10), le quotient  $\frac{l}{l'}$  sera plus grand que  $\frac{1}{4}$  et le quotient  $\frac{n+1}{l}$  sera plus petit qu'un nombre arbitraire donné à l'avance. Il suffit pour cela de prendre le nombre  $l'$  assez grand.

12. Soit  $X_l$  une division du côté  $(0, a)$  et  $Y_m$  une division du côté  $(0, b)$  de  $(0, a; 0, b)$ . Les points de  $Y_m$  étant

$$0 = y_0 < \dots < y_j < y_{j+1} < \dots < y_m = b,$$

les lignes  $x = x_i, y = y_j$ , partagent  $(0, a; 0, b)$  en  $lm$  rectangles.

Nous nommerons cette figure une division (rectangulaire) de  $(0, a; 0, b)$ . Les lignes  $x = x_i, y = y_j$  en sont les lignes diviseurs, leurs points communs sont les sommets de la division, les rectangles  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$  en sont les rectangles. Le symbole de la division est  $X_l Y_m$ .

13.  $X_{l_r} Y_{m_r}$  ( $r = 1, 2 \dots$ ) étant une suite de divisions, nous supposerons que la suite  $X_{l_r}$  et la suite  $Y_{m_r}$  ont la propriété désignée dans le No. 3.

La suite  $X_{l_r} Y_{m_r}$  est de première espèce si les suites  $X_{l_r}$  et  $Y_{m_r}$  le sont aussi.

14. Nous ferons correspondre une valeur  $[i, j]$  à chacun des  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ . Soit  $X_l Y_m [i, j]$  la somme de ces valeurs en nombre  $lm$ .

15. Si 
$$\lim_{r=\infty} X_{l_r} Y_{m_r} [i, j]$$

est déterminé, son symbole sera

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} [i, j],$$

et si cette dernière valeur est indépendante de la suite  $X_{l_r} Y_{m_r}$ , son symbole sera simplement

$$XY[i, j].$$

16. Si les suites  $X_{l_r}$  et  $Y_{m_r}$  ont un quotient finie  $u$  et si de plus

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{y_{j+1} - y_j} \text{ et } \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{i+1} - x_i},$$

$$(i = 0, 1 \dots l_r - 1; j = 0, 1, \dots m_r - 1; r = 1, 2 \dots)$$

sont  $\geq u$ , nous dirons que la suite  $X_{l_r} Y_{m_r}$  a un quotient fini  $u$ .

Il est aisé de voir qu'il existe deux constantes  $U$  et  $V$  indépendantes de  $r$ , telles que

$$+\infty > U \geq 1 \geq V > 0,$$

et telles que, pour un certain nombre entier  $q_r$  — qui varie (en croissant) avec  $r$ , on ait:

$$l_r = L_r \cdot q_r, \quad m_r = M_r \cdot q_r, \quad x_{i+1} - x_i = \frac{A_r^{(i)}}{q_r},$$

$$y_{j+1} - y_j = \frac{B_r^{(j)}}{q_r}, \quad (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = \frac{P_r^{(i,j)}}{q_r^2},$$

$L_r, M_r, A_r^{(i)}, B_r^{(j)}, P_r^{(i,j)}$  étant compris entre  $U$  et  $V$  et étant variables avec  $r, i$  et  $j$ . On peut prendre  $q_r = l_r$ .

17. Les signes  $Y$  et  ${}^u Y^v$  ont une signification analogue à celle des signes  $X$  et  ${}^u X^v$ . (No. 5. 6).

Il est aisé de voir que les signes  $X_l$  et  $Y_m$  sont employés à la place du signe connu  $\Sigma$  et qu'ils en ont les mêmes propriétés. Par exemple:

$$X_l Y_m [i, j] = X_l [Y_m [i, j]] = Y_m [X_l [i, j]].$$

18. Dans ce que suit l'expression »suite de divisions« désignera toujours une suite de divisions de première espèce.

Dans le chapitre suivant, nous décrirons quelques propriétés de la fonction semicontinue, et nous désignerons une grande partie des quantités géométriques, qui se présentent pour la surface

$$z = f(x, y).$$

### Chapitre III.

#### Fonction semicontinue. Intégrale par défaut. Oscillation, longueur et autres quantités.

1. Soit la fonction réelle  $z = \psi(x)$  définie pour toutes les valeurs de  $x$ , comprises dans  $(0, a)$ . Soient  $\varepsilon$  et  $\eta$  deux quan-

tités positives, et soit  $g^\psi(x - \varepsilon, x + \eta)$  la limite inférieure des valeurs de  $z$ , dont l'argument  $x$  se trouve à la fois dans  $(x - \varepsilon, x + \eta)$  et dans  $(0, a)$ .

Si la fonction  $\psi$  est telle que pour chaque  $x$  de  $(0, a)$  on ait

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon + \eta = 0} g^\psi(x - \varepsilon, x + \eta),$$

nous dirons que  $\psi$  est une fonction semicontinue (inférieurement).\*

La fonction semicontinue est uniforme par définition pour chaque valeur de  $x$ .

Si  $\psi(x') = +\infty$ , il existe pour chaque nombre  $K$  donné à l'avance, deux valeurs positives  $\varepsilon, \eta$ , telles que  $\psi(x) > K$  pour chaque point  $x$  de  $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ .

Dans chaque intervalle partiel de  $(0, a)$ , par exemple dans l'intervalle  $(u, v)$ , il existe au moins un point  $x'$ , tel que  $\psi(x') = g^\psi(u, v)$ ; c'est à dire que  $\psi(x)$  a un minimum dans chaque intervalle.

L'ensemble des valeurs des minima de  $\psi(x)$  est dénombrable. L'ensemble des points  $x'$  pour lesquels il existe un intervalle  $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ , ( $\varepsilon > 0, \eta > 0$ ), de manière que, pour les  $x \neq x'$  de l'intervalle, on ait  $\psi(x) > \psi(x')$ , est dénombrable. C'est à dire que l'ensemble des minima essentiels est dénombrable.

On peut trouver un ensemble dénombrable de points partout dense dans  $(0, a)$ , et tel qu'en désignant par  $g^\psi(x - \varepsilon, x + \eta)$  la limite inférieure des valeurs de  $\psi(x)$ , pour les points de l'ensemble qui se trouvent dans  $(x - \varepsilon, x + \eta)$ , on ait pour chaque point  $x$  de  $(0, a)$

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon + \eta = 0} g^\psi(x - \varepsilon, x + \eta).$$

Etant donné une constante  $d$ , l'ensemble des  $x$  pour lesquels  $\psi(x) \leq d$  est relativement parfait (fermé).

Soit  $\delta$  un nombre positif, donné à l'avance. On peut trouver pour chaque  $x'$  un voisinage  $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ , tel que, pour les  $x$

\* Les propriétés de la fonction semicontinue décrites dans ce No. sont dues (sauf peut-être celles sur les minima) à M. BAIRE. Voir: Sur les fonctions de variables réelles. Thèse, 1899. P. 6 et suiv.

de ce voisinage on ait

$$\psi(x') - \psi(x) < \delta^*.$$

Et inversement une fonction uniforme, montrant la propriété précédente est semicontinue.

La fonction semicontinue générale, même dans le cas, où ses valeurs sont toutes comprises entre des limites finies, n'est intégrable dans aucun intervalle partiel de  $(0, a)$ .

Une telle fonction a une expression analytique. Si la fonction est bornée inférieurement, on a

$$\psi(x) = \varphi_0(x) + \sum_1^{\infty} \varphi_h(x),$$

$\varphi_0$  et  $\varphi_h$  étant des fonctions continues, et  $\varphi_h \geq 0$ . Inversement, la somme d'une telle série est toujours une fonction semicontinue, bornée inférieurement.

Dans chaque intervalle  $(0, a)$  il y a des points  $x$  pour lesquels  $\psi(x)$  est continue.

La somme de plusieurs fonctions semicontinues est aussi une fonction semicontinue.

L'ensemble des fonctions semicontinues a la même puissance que le continu.

2. Soit  $z = \varphi(x)$  une fonction quelconque, définie pour les points de  $(0, a)$ . Son intégrale par défaut est la quantité

$$Xg^{\varphi}(x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Le symbole de l'intégrale par défaut est

$$\int_0^a \varphi(x) dx^{**}.$$

Nous remarquons qu'il y a des fonctions semicontinues  $\psi(x)$ , bornées inférieurement, telles que, dans chaque intervalle partiel de  $(0, a)$ , il ait des points  $x'$  pour lesquels  $\psi(x') = +\infty$ , et

\* On doit prendre

$$+\infty - \psi(x) = \frac{1}{\psi(x)}, \quad +\frac{1}{\infty} = 0.$$

\*\* DARBOUX. Mémoire sur les fonctions discontinues. Annales de l'Ecole Normale 1875.

$$\int_0^{\alpha} \psi(x) dx$$

a néanmoins une valeur finie. Soit  $K$  un nombre positif donné à l'avance. L'ensemble des  $x$  pour lesquels  $\psi(x) > K$ , est formé de points, intérieurs à une infinité dénombrable d'intervalles  $(u_h, v_h)$  ( $u_h \leq v_h$ ), n'ayant aucun point intérieur commun.

$$\int_0^{\alpha} \psi(x) dx$$

ayant une valeur finie, en prenant  $K$  assez grand, les quantités

$$\sum_1^{\infty} (v_h - u_h), \quad K \sum_1^{\infty} (v_h - u_h), \quad \sum_1^{\infty} \int_{u_h}^{v_h} \psi(x) dx$$

sont aussi petites que l'on veut.

3. Soit  $J_y(x, y)$  l'oscillation de la section  $x = \text{const.}$  de la surface  $z = f(x, y)$  dans l'intervalle  $(0, y)$ , c'est à dire la quantité.

$${}^0Y^y |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|,$$

et soit

$$J_x(x, y) = {}^0X^x |f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y)|.$$

Soit de plus  $S_y(x, y)$  la longueur de la section  $x = \text{const.}$  dans  $(0, y)$ , c'est à dire

$$S_y(x, y) = {}^0Y^y [(y_{j+1} - y_j)^2 + (f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j))^2]^{\frac{1}{2}},$$

et de même

$$S_x(x, y) = {}^0X^x [(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y))^2]^{\frac{1}{2}}.$$

On a  $y \geq S_y(x, y) - J_y(x, y) > 0$ .\*

4. Posons

$$Y_{m_r} [(y_{j+1} - y_j)^2 + (f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j))^2]^{\frac{1}{2}} = m_r(x),$$

$$X_{l_r} [(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y))^2]^{\frac{1}{2}} = l_r(y).$$

On a  $m_{r+1}(x) \geq m_r(x)$ . Il est évident que les fonctions  $m_r(x)$  et  $l_r(y)$  sont des fonctions bornées et continues.

---

\* SCHEEFFER. Allgemeine Untersuchungen über die Rectifikation der Kurven. Acta Mathematica. T. V. 1884. JORDAN, Cours d'anal. 2. éd. 1. Paris 1893, p. 100.

## 5. Posons

$$J_y(x, b) = J(x), J_x(a, y) = J(y), S_y(x, b) = S(x), S_x(a, y) = S(y).$$

On a 
$$S(x) \geq m_r(x), \quad S(y) \geq l_r(y),$$

$$S(x) = \lim_{r=\infty} m_r(x), \quad S(y) = \lim_{r=\infty} l_r(y).$$

Pour notre surface on aura

$$J(x) < Gb, \quad S(x) < (1 + G^2)^{\frac{1}{2}} b,$$

$G$  étant le nombre défini à la fin du Chap. I.

6.  $J(x)$  et  $S(x)$  sont à la fois finies ou infinies. Il en est de même pour  $J(y)$  et  $S(y)$ .

7. Soit  $y'' > y'$ , on aura

$$S_y(x, y'') - S_y(x, y') \geq y'' - y', \quad J_y(x, y'') - J_y(x, y') \geq 0.$$

Les premiers membres de ces inégalités sont des fonctions semicontinues de  $x$ .

Remarque 1. On se persuade aisément que  $S(x)$  est une fonction semicontinue\*. Les lignes courbes  $z = \frac{b}{n} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ont la même longueur dans  $(0, b)$ , et elles peuvent évidemment former les sections  $x = \frac{a}{n}$  d'une surface. La section  $x = 0$  est évidemment l'axe des  $y$  et sa longueur est  $b$ , tandis que la longueur des lignes décrites est  $> b \cdot 5^{\frac{1}{2}}$ .

J'ai démontré, dans un de mes travaux publiés en langue hongroise que,  $\psi(x)$  étant une fonction semicontinue bornée, et telle que  $\psi(x) \geq b$ , il existe une surface  $z = f(x, y)$  pour laquelle  $S(x) = \psi(x)$ . Nous devons donc considérer  $S(x)$  comme une fonction semicontinue générale.

Remarque 2.  $S(x)$  et  $J(x)$  sont des fonctions ponctuellement discontinues; elles ont donc dans chaque intervalle des points de continuité communs. Là, où  $S(x)$  est continue,  $J(x)$  l'est aussi, mais la réciproque n'est pas vraie.

Lorsque  $S_y(x, y)$  est continue pour  $x = x'$ ,  $y = y'$ , elle est aussi continue pour  $x = x'$ ,  $y \leq y'$ . De même pour  $J_y(x, y)$ . La fonction  $J_y(x, y)$  montre plus de généralité que  $S_y(x, y)$ .

---

\* LEBESGUE, Thèse, p. 114.

8. Soit  $f_{i,j}$  la portion de la surface  $z = f(x, y)$ , située sur  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ . Désignons par  $A, B, C, D$ , les points de  $f_{i,j}$  dont les coordonnées  $x$  et  $y$  sont respectivement

$$x_i, y_j, x_i, y_{j+1}, x_{i+1}, y_{j+1}, x_{i+1}, y_j,$$

et soient  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , les projections orthogonales de ces points sur le plan  $xy$ ,  $A_2, B_2, C_2, D_2$ , leurs projections sur le plan  $xz$  et  $A_3, B_3, C_3, D_3$  leurs projections sur le plan  $yz$ .

9. Soit  $\alpha_{i,j} = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$  l'aire de  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ , et posons

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)| dx = \beta_{i,j}, \quad \int_{y_j}^{y_{j+1}} |f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y)| dy = \gamma_{i,j}.$$

Il est aisé de voir, par exemple que  $\beta_{i,j}$  est l'aire limitée par la projection du contour de  $f_{i,j}$ .

10. Soit  $[\alpha_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2 + \gamma_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}} = \tau_{i,j}.$

11. Soient

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (J_y(x, y_{j+1}) - J_y(x, y_j)) dx = \bar{\beta}_{i,j},$$

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} (J_x(x_{i+1}, y) - J_x(x_i, y)) dy = \bar{\gamma}_{i,j}.$$

12. Soit  $[\alpha_{i,j}^2 + \bar{\beta}_{i,j}^2 + \bar{\gamma}_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}} = \tau'_{i,j}.$

13. Soient les distances positives

$$\overline{AB} = d_{i,j}^y, \quad \overline{BC} = d_{i,j+1}^x, \quad \overline{CD} = d_{i+1,j}^y, \quad \overline{AD} = d_{i,j}^x,$$

Considérons la figure constituée par les lignes

$$\overline{A_2 B_2}, \quad \overline{B_2 C_2}, \quad \overline{C_2 D_2}, \quad \overline{D_2 A_2},$$

Cette figure peut être 1<sup>o</sup>. une ligne, 2<sup>o</sup>. un triangle, 3<sup>o</sup>. un parallélogramme, 4<sup>o</sup>. un trapèze, 5<sup>o</sup>. un quadrilatère dont les côtés  $\overline{A_2 B_2}$ ,  $\overline{C_2 D_2}$  étant comme toujours parallèles sont différents de zéro et dont les côtés  $\overline{A_2 D_2}$ ,  $\overline{B_2 C_2}$  se coupent en un point  $O_2$ .

Soit  $b_{i,j}$  l'aire limitée par le contour  $A_2 B_2 C_2 D_2$ . Dans les quatre premiers cas on a

$$b_{i,j} = \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) \cdot (\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2}).$$

Dans le 5<sup>ième</sup> cas,  $b_{i,j}$  est égal à la somme des aires des deux triangles  $A_2 B_2 O_2$  et  $O_2 C_2 D_2$ . Les aires de ces triangles sont, bien entendu, positives.

L'aire limitée d'une manière analogue par le contour  $A_3 B_3 C_3 D_3$  est désignée par  $c_{i,j}$ .

15. Soit

$$[\alpha_{i,j}^2 + b_{i,j}^2 + c_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}} = n_{i,j}.$$

16. Soient

$$\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \cdot (\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2}) = b'_{i,j},$$

$$\frac{1}{2}(y_{j+i} - y_j) \cdot (\overline{A_3 D_3} + \overline{B_3 C_3}) = c'_{i,j},$$

$$[\alpha_{i,j}^2 + b'_{i,j}^2 + c'_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}} = n'_{i,j}.$$

17. Soit dans la section  $x_i = \text{const.}$ ,  $\theta_{i,j}^y$  l'aire limitée par la corde  $\overline{AB}$  et par l'arc  $\widehat{AB}$ ; on aura

$$\theta_{i,j}^y = \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left[ f(x_i, y) - \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j)}{y_{j+1} - y_j} (y - y_j) - f(x_i, y_j) \right] dy.$$

Soit  $\theta_{i+1,j}^y$  l'aire limitée par  $\overline{CD}$  et  $\widehat{CD}$ . Soit, dans la section  $y_j = \text{const.}$ ,  $\theta_{i,j}^x$  l'aire limitée par  $\overline{AD}$  et  $\widehat{AD}$ , et soit de même  $\theta_{i,j+1}^x$  l'aire limitée par  $\overline{BC}$  et  $\widehat{BC}$ .

Inégalités entre les quantités définies ci-dessus.

On obtient, par l'emploi des considérations géométriques simples, et par l'emploi de quelques-unes des inégalités du Chapitre qui va suivre, les inégalités suivantes.

$$|b_{i,j} - \beta_{i,j}| \leq \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x, \quad |c_{i,j} - \gamma_{i,j}| \leq \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y.$$

$$\tau_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + \beta_{i,j} + \gamma_{i,j}, \quad n_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j},$$

$$|\tau_{i,j} - n_{i,j}| \leq \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y,$$

$$n_{i,j} \leq n'_{i,j} < ABC + ADC.$$

18. Soient

$$S_y(x_i, y_{j+1}) - S_y(x_i, y_j) = s_{i,j}^y,$$

$$S_x(x_{i+1}, y_j) - S_x(x_i, y_j) = s_{i,j}^x.$$

19.

$$s_{i,j}^y - d_{i,j}^y = \delta_{i,j}^y, \quad s_{i,j}^x - d_{i,j}^x = \delta_{i,j}^x.$$

On a évidemment

$$\delta_{i,j}^y \geq 0, \quad \delta_{i,j}^x \geq 0.$$

20.  $\theta_{i,j}^x$  est au plus égal à l'aire d'une ellipse, dont la distance focale est  $d_{i,j}^x$ , et dont la grand axe est

$$s_{i,j}^x = d_{i,j}^x + \delta_{i,j}^x.$$

Si  $\theta_{i,j}^x$  était plus grand que l'aire de l'ellipse,  $\widehat{AD}$  aurait des points  $P$  à l'extérieur de cette ellipse (dont la distance focale coïncide avec  $\overline{AD}$  et qui est située dans le plan  $y = y_j$ ), on aurait donc

$$\overline{AP} + \overline{PD} > s_{i,j}^x,$$

ce qui est impossible; on a, en effet, d'après la définition de la longueur

$$\overline{AP} + \overline{PD} \leq s_{i,j}^x.$$

On trouve que

$$\theta_{i,j}^x \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} \pi}{4} s_{i,j}^{x^{\frac{3}{2}}} \delta_{i,j}^{r^{\frac{1}{2}}}.$$

Et par des considérations analogues, relatives à un rectangle et à un cercle on trouve

$$\theta_{i,j}^x \leq (x_{i+1} - x_i) s_{i,j}^x, \quad \theta_{i,j}^x \leq \pi (s_{i,j}^x)^2.$$

Soit  $AB$  la longueur finie d'une courbe à double courbure et soient  $A$  et  $B$  ses extrémités.

Joignons les points de l'arc  $\widehat{AB}$  par des distances rectilignes à des points quelconques de  $\overline{AB}$ .

Projetons la figure orthogonalement sur un plan quelconque. La mesure extérieure\* de cette figure ou son aire (lorsqu'elle existe) est au plus égale à

$$\frac{2^{\frac{1}{2}} \pi}{4} \widehat{AB}^{\frac{3}{2}} (\widehat{AB} - \overline{AB})^{\frac{1}{2}}$$

Car la figure est à l'intérieur d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe  $\overline{AB}$ , ayant pour méridienne l'ellipse, dont les foyers sont  $A$  et  $B$ , et dont la grand axe est égal à  $\widehat{AB}$ , et la projection orthogonale de l'ellipsoïde de révolution sur un plan quelconque a une aire au plus égale à celle de sa méridienne.

---

\* Dans le sens déjà cité de M. JORDAN.

### Chapitre IV. Inégalités arithmétiques.

Voici, sans démonstration, parmi les quelques inégalités dont nous aurons besoin, celles qui ne sont pas d'une évidence immédiate :

Dans ce chapitre chaque lettre désigne une quantité non négative.

1.  $[(A-a)^2 + (B-b)^2 + (C-c)^2]^{\frac{1}{2}} \geq [A^2 + B^2 + C^2]^{\frac{1}{2}} - a - b - c$
2.  $[A^2 + B^2 + C^2]^{\frac{1}{2}} + b + c \geq [A^2 + (B+b)^2 + (C+c)^2]^{\frac{1}{2}} \geq [A^2 + B^2 + C^2]^{\frac{1}{2}}.$

3. Étant

$$A \leq \sum_1^n a_h, \quad B \leq \sum_1^n b_h, \quad C < \sum_1^n c_h,$$

on a

$$[A^2 + B^2 + C^2]^{\frac{1}{2}} < \sum_1^n [a_h^2 + b_h^2 + c_h^2]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_1^n (a_h + b_h + c_h).$$

4. Soit  $C_1 + C_2 \geq \varepsilon$  et

$$\begin{aligned} & [A_1^2 + B_1^2 + C_1^2]^{\frac{1}{2}} + [A_2^2 + B_2^2 + C_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2 + (C_1 + C_2 - \varepsilon)^2]^{\frac{1}{2}} + \lambda, \end{aligned}$$

$\lambda$  est nécessairement  $\geq 0$  et

$$\begin{aligned} & |A_1 B_2 - A_2 B_1| \\ & \leq 2 [A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2]^{\frac{1}{2}} [(A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2 + (C_1 + C_2)^2]^{\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{1}{2}} \\ & + \{ 2 [A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2]^{\frac{1}{2}} + [(A_1 + A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2 + (C_1 + C_2)^2]^{\frac{1}{2}} \} \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

Soit de plus  $D$  au moins égal à la plus grande des

$$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2,$$

alors

$$|A_1 B_2 - A_2 B_1| \leq 10. (D^{\frac{3}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} + D \lambda + \lambda^2).$$

5. Si

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_q \leq \delta,$$

on aura

$$\delta_1^{\frac{1}{2}} + \delta_2^{\frac{1}{2}} + \dots + \delta_q^{\frac{1}{2}} \leq q^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}}.$$

## Chapitre V.

## Indication des surfaces ayant une aire finie.

1.  $\int_0^a J(x) dx$  et  $\int_0^a S(x) dx$  sont toutes à la fois finies ou infinies.

$$2. \quad \int_0^a J(x) dx = Y_{m_r} \left( \int_0^a (J_y(x, y_{j+1}) - J_y(x, y_j)) dx \right) \\ = Y \left( \int_0^a |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)| dx \right) = XY\beta_{i,j}.$$

3. Soit

$$XY\tau_{i,j} = XY\tau'_{i,j} = t.$$

$t$  et la somme des deux intégrales par défaut

$$\int_0^a J(x) dx, \int_0^b J(y) dy$$

sont à la fois finies ou infinies.\*

4. Les surfaces qui ont une aire  $(T_1, \dots, T_6)$  finie, sont celles pour lesquelles  $t$  est fini. De même, si l'aire est finie,  $t$  est aussi fini.

5. Il existe pour chaque surface, ayant une aire infinie, un ensemble de points situé sur elle et relativement parfait, tel que l'aire d'une portion de la surface soit finie ou infinie, suivant que cette portion ne contient aucun point de l'ensemble, ou renferme au moins un point de cet ensemble. Si nous donnons un ensemble relativement parfait, situé dans  $(0, a; 0, b)$  il y a des surfaces sur  $(0, a; 0, b)$  pour lesquelles l'ensemble décrit ci dessus a comme projection sur le plan  $xy$  l'ensemble donné.

Il y a en particulier des surfaces, dont l'aire est infinie pour chaque portion arbitraire de la surface.

Remarque. On a un théorème analogue pour la longueur d'une ligne courbe  $z = \varphi(x)$ ,  $\varphi$  étant une fonction uniforme, bornée et continue de  $x$ .

---

\* Voir: Z. DE GEÖCZE: A  $z = f(x, y)$  felület quadraturája. Első rész. 1906. Ungvár. Comptes Rendus 1907, fév. 14.

6. En admettant ces théorèmes que nous donnons sans démonstrations, il résulte des No. 3., 4. et de la fin du Chap. I que l'aire de notre première surface est finie.

### Chapitre VI

Pour notre surface  $XY\tau_{ij}$  existe, et  $\lim_{s=\infty} \Delta_s t \geq t$ .

1. Pour notre surface  $t$  est fini et déterminé, c'est à dire que  $XY\tau_{i,j}$  existe et a une valeur finie.

Pour démontrer ce fait, nous remarquerons que

$$\begin{aligned} Y_{m_r} \beta_{i,j} &= Y_{m_r} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)| dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} Y_{m_r} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)| dx < \bar{S}(x_{i+1} - x_i)^*, \end{aligned}$$

et de même

$$X_{l_r} \gamma_{i,j} < \bar{S}(y_{j+1} - y_j).$$

Désignons de plus par  $\varepsilon_r$  la limite supérieure des valeurs de

$$|f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|, \quad |f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y)|,$$

nous aurons  $\lim_{r=\infty} \varepsilon_r = 0$  — la surface étant continue.

On aura

$$X_{l_r} \beta_{i,j} < a \varepsilon_r, \quad Y_{m_r} \gamma_{i,j} < b \varepsilon_r$$

et de plus

$$X_{l_r} Y_{m_r} \beta_{i,j} < \bar{S} a, \quad X_{l_r} Y_{m_r} \gamma_{i,j} < \bar{S} b.$$

De la signification géométrique des  $\alpha_{i,j}$ ,  $\beta_{i,j}$ ,  $\gamma_{i,j}$  on conclura qu'en partageant le rectangle  $\alpha_{i,j}$  en plusieurs autres (n'impieçant l'un sur l'autre et remplissant  $\alpha_{i,j}$ ) les quantités analogues à  $\alpha_{i,j}$  ont pour somme  $\alpha_{i,j}$ , les quantités analogues à  $\beta_{i,j}$  ont pour somme une valeur  $\geq \beta_{i,j}$ , et de même pour les quantités analogues à  $\gamma_{i,j}$ .

Donc, si  $X_{l_r} Y_{m_r}$  est une suite de divisions, il résulte du No. 3 du Chap. IV que la suite des valeurs de  $X_{l_r} Y_{m_r} \tau_{i,j}$  est une suite de valeurs non décroissantes.

\* Car on a

$$Y_{m_r} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)| \leq J(x) < \bar{S}.$$

Dans tout ce que suit on pourrait prendre au lieu de  $\bar{S}$  un  $J$ , tel que  $J(x) < J$ ,  $J(y) < J$ .

Et on a

$$\tau_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + \beta_{i,j} + \gamma_{i,j}.$$

Donc

$$X_{l_r} Y_{m_r} \tau_{i,j} \leq ab + \bar{S}(a+b),$$

et ainsi

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \tau_{i,j}$$

existe et a une valeur finie.

De plus,  $X_{l_r} Y_{m_r}$  étant une suite quelconque de divisions (de première espèce ou non), les valeurs limites de la suite des valeurs  $X_{l_r} Y_{m_r} \tau_{i,j}$  coïncident avec  $X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \tau_{i,j}$ .

Ce théorème s'établit de la même manière que celle qui fut employée par L. SCHEEFFER, pour démontrer l'existence de la longueur d'une courbe, c'est à dire à l'aide de la superposition des divisions des deux suites, et de la continuité, ce principe étant exprimé par les quatre premières inégalités.

Donc  $XY\tau_{i,j}$  existe et a une valeur finie.

2.  $\mathcal{A}_s$ , ( $s = 1, 2, \dots$ ) étant une suite de polyèdres, telle que celles que nous avons décrites au Chap. I, nous allons démontrer que

$$\lim_{s=\infty} \mathcal{A}_s t \geq t.$$

Désignons par  $\mathcal{A}_s^{i,j}$  la partie de  $\mathcal{A}_s$  qui est située au-dessus de l'intérieur de  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$  et au-dessus de  $\overline{A_1 B_1} A_1 D_1$ .\*

Soit  $\mathcal{A}_s^{i,j} t$  son aire. Nous prendrons  $s$  assez grand de façon que  $\mathcal{A}_s^{i,j}$  existe pour chaque  $i$  et  $j$ .

Soient  $A_{i,j}$ ,  $B_{i,j}$ ,  $C_{i,j}$  les aires des figures qu'on obtient en projetant orthogonalement les points de  $\mathcal{A}_s^{i,j}$  sur les plans  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ . On voit qu'en prenant  $s$  assez grand, on aura ou  $A_{i,j} = \alpha_{i,j}$ , ou  $|A_{i,j} - \alpha_{i,j}|$  aussi petit qu'on le veut, ou bien  $B_{i,j} \geq \beta_{i,j}$ , ou  $\beta_{i,j} - B_{i,j}$  aussi petit qu'on le veut; il en est de même pour  $C_{i,j}$ ,  $\gamma_{i,j}$ .

Mais d'après la géométrie élémentaire:

$$\mathcal{A}_s^{i,j} t \geq (A_{i,j}^2 + B_{i,j}^2 + C_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou, d'après ce qui précède:

\* Il convient de remarquer qu'une ligne droite normale au plan  $xy$  peut couper  $\mathcal{A}_s$  en plusieurs points, et de plus que  $\mathcal{A}_s$  peut avoir des faces normales au plan  $xy$  de manière que  $\mathcal{A}_s^{i,j}$  peut être constitué par plusieurs portions, lignes polygonales et points isolés.

$$\Delta_{s,j}^i t \geq (\alpha_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2 + \gamma_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda_{i,j},$$

en désignant par  $\lambda_{i,j}$  une quantité positive telle, que la somme de tous les  $\lambda_{i,j}$  soit plus petite que  $\eta_r$ ,  $\eta_r$  étant une quantité positive donnée à l'avance.

On aura enfin, en faisant la somme pour tous les  $\Delta_{s,j}^i$ :

$$\Delta_s t \geq X_{ir} Y_{m_r} \tau_{i,j} - \eta_r,$$

et à la limite

$$\lim_{s=\infty} \Delta_s t \geq t.$$

On démontre de la même manière que  $X_{i_\infty} Y_{m_\infty} n_{i,j}$  et à fortiori  $X_{i_\infty} Y_{m_\infty} n'_{i,j}$  sont au moins égaux à  $t$ , en supposant, bien entendu, qu'ils existent.

Remarquons que les deux théorèmes que nous venons de démontrer s'appliquent aussi à la surface générale  $z = f(x, y)$ .

Remarque. Ayant

$$ABC + ADC \geq n'_{i,j} \geq n_{i,j},$$

si l'on veut que pour notre première surface, pour une suite  $X_{i_r} Y_{m_r}$ , on ait

$$X_{i_\infty} Y_{m_\infty} (ABC + ADC) = t,$$

on doit avoir

$$X_{i_\infty} Y_{m_\infty} n_{i,j} = t.$$

Dans le Chapitre suivant nous allons former une suite de divisions. Dans le Chap. VIII nous démontrerons que pour cette suite la condition signalée est remplie.

## Chapitre VII.

**Approximation des  $S(x)$  par  $m_r(x)$ . Formation de certaines suites de divisions à quotient fini et ne dépendant que de la surface.**

1. Soit  $\delta$  une quantité positive donnée à l'avance. Soit  $g$  la valeur finie du minimum de  $S(x)$  dans  $(x', x'')$  et soit  $Y_{m_1}, Y_{m_2}, \dots$ , une suite de divisions.

Il existe alors un nombre entier  $s'$ , tel que dans  $(x', x'')$ ,

$$g - m_s(x) < \delta,$$

si  $s \geq s'$ .

Soit par exemple  $S(x') = g$ . Si  $k$  est assez grand, on aura  $g - m_k(x') < \frac{\delta}{2}$ , et  $m_k(x)$  est continu. Par suite, ou bien on aura  $g - m_k(x) < \delta$  dans l'intervalle total  $(x', x'')$ , ou bien il existera un point  $x_1$ , situé à l'intérieur de  $(x', x'')$ , tel que l'on ait  $g - m_k(x) < \delta$  dans  $(x', x_1)$ , mais  $g - m_k(x_1) = \delta$ . Mais, pour un certain  $k_1 > k$ , on a  $g - m_{k_1}(x_1) < \frac{\delta}{2}$ . Car

$$\lim_{k=\infty} m_k(x) = S(x) \geq g.$$

Ou bien dans  $(x', x'')$  on a  $g - m_{k_1}(x) < \delta$ , ou bien il existe un  $x_2$  et un  $k_2$ , étant en même relation avec  $x_1$ , comme  $x_1$  et  $k_1$  l'était avec  $x'$ .

Si, en continuant ce procédé, nous atteignons  $x''$  à l'aide des points  $x_1, x_2, \dots$ , en nombre fini, le théorème sera démontré, en prenant  $s'$  plus grand que le dernier des  $k_1, k_2, \dots$ . Mais les points  $x_1 < x_2 < \dots < x_r < \dots$ , sont nécessairement en nombre fini\*, car s'il n'en était pas ainsi, on aurait:

$$\lim_{r=\infty} x_r = \xi \leq x''.$$

Soit  $\xi < x''$ ; alors dans  $(x', \xi)$  et dans chaque voisinage de  $\xi$ , il y aurait des points  $x$  tels que

$$g - m_s(x) \geq \delta,$$

pour chaque nombre entier  $s$ . Mais il existe un nombre  $p$ , tel que

$$g - m_p(\xi) < \frac{\delta}{2}, \text{ car } S(\xi) \geq g,$$

et comme  $m_p(x)$  est continu, il existe pour  $\xi$  un voisinage pour lequel  $g - m_p(x) < \delta$ . Ainsi  $\xi < x''$  est impossible, et l'on démontre de la même manière que  $\xi = x''$  est aussi impossible.

On voit de plus aisément que, si  $\delta$  est un nombre positif donné à l'avance, et  $X_l$  une division, on peut trouver un nombre entier  $s'$ , tel que l'on ait si,  $s \geq s'$ , pour chaque point  $x$  de  $(x_i, x_{i+1})$

$$g_s^s(x_i, x_{i+1}) - m_s(x) < \delta, \quad (i = 0, 1 \dots, l-1).$$

2. Soit  $c$  et  $d$  respectivement la limite inférieure et supérieure des valeurs de  $S(x)$  et soit  $d$  fini, comme pour notre surface.

---

\* On peut démontrer le théorème à l'aide d'un théorème de M. BOREL, généralisé par M. LEBESGUE. Voir: Lebesgue. Leçons sur l'intégration. p. 105.

Soient  $\delta$  et  $\eta$  des nombres positifs, donnés à l'avance, et soit  $Y_{m_1}, Y_{m_2}, \dots, Y_{m_s}, \dots$ , une suite de divisions de  $(0, b)$ , d'ailleurs arbitraire.

Soit encore  $X_n$  une division de  $(0, a)$ .

**Théorème.** Il existe un nombre  $s'$  entier, positif, fini, et une division  $X_l$  de  $(0, a)$  qui a pour quotient  $\frac{1}{b}$ , et qui contient  $X_n$ , de manière que,  $e$  étant le nombre des points diviseurs de  $X_l$  qui ne satisfont pas à l'inégalité

$$S(x_i) - m_s(x_i) < \delta,$$

on ait pour chaque  $s \geq s'$  l'inégalité

$$e < l \cdot \eta.$$

**Démonstration.**

a) Soit  $k$  un nombre assez grand pour qu'en partageant l'intervalle  $(c, d)$  en  $k$  parties égales, ces parties soient toutes moindres que  $\frac{\delta}{2}$ . Soient

$$c = c_0 < c_1 < \dots < c_k < \dots < c_k = d,$$

les extrémités de ces intervalles et soit  $S_1$  l'ensemble de ces  $x$  pour lesquels  $S(x) \leq c_1$ .

Cet ensemble existe, et il est relativement parfait (No. 1. Chap. III).

Soit  $d_1$  sa mesure\* qui peut être aussi égale à zéro.

Renfermons  $S_1$  dans des intervalles en nombre fini, situés sur  $(0, a)$  et ayant  $d_1 + \varepsilon_1$  pour somme de leurs longueurs. Soit  $d_1'$  le nom collectif de ces intervalles. Si  $d_1 < a$ , on prend  $\varepsilon_1 > 0$ , mais  $d_1 + \varepsilon_1 < a$ .

Lorsque  $d_1 < a$ , les extrémités des  $d_1'$  sont prises de façon qu'elles ne soient pas des points de  $S_1$ , sauf peut être les points 0 et  $a$ .

Lorsque  $d_1 < a$ , soit  $S_2$  l'ensemble qui n'a pas de points à

\* La mesure (extérieure et linéaire) d'un ensemble situé sur  $(0, a)$  est la quantité  $X[i]$ ,  $[i]$  étant égal à  $x_{i+1} - x_i$  lorsque  $(x_i, x_{i+1})$  contient au moins un point de l'ensemble, à 0 dans le cas contraire. On a  $a \geq X[i] \geq 0$ . Il est impossible de renfermer l'ensemble dans un nombre limité d'intervalles, dont la somme des longueurs serait plus petite que  $d$ . Voir: JORDAN, Cours d'analyse (2), Paris 1893, 1, p. 28.

l'intérieur des  $d_1'$  et dont les points 0 et  $a$  ne font pas partie quand ils appartiennent à des  $d_1'$ , et dont les points satisfont à la condition  $S(x) < c_2$ . Ces points satisfont aussi à la condition  $S(x) > c_1$ .

$S_2$  n'existe pas nécessairement. Mais lorsqu'il existe, il est relativement parfait, soit  $d_2$  sa mesure ( $d_2 \geq 0$ ).

Renfermons  $S_2$  dans des intervalles du nom collectif  $d_2'$ , situés sur  $(0, a)$  en nombre fini, n'ayant aucun point intérieur commun avec les  $d_1'$ , et ayant  $d_2 + \varepsilon_2$  pour somme de leurs longueurs.

Lorsque  $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 < a$ , nous prenons  $\varepsilon_2 > 0$ , mais  $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 + \varepsilon_2 < a$ ; de plus les extrémités des  $d_2'$ , sauf peut-être les points 0,  $a$ , et les extrémités des  $d_1'$ , ne seront pas des points de  $S_2$ .

Dans le cas où  $S_2$  n'existe pas, les  $d_2'$  peuvent être, si l'on veut, des intervalles arbitraires, mais ayant toutes les propriétés signalées ci-dessus ( $d_2 = 0$ !).

Lorsque  $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 < a$ , soit  $S_3$  l'ensemble des points  $x$  de  $(0, a)$  qui ne sont situés ni à l'intérieur des intervalles  $d_1'$ ,  $d_2'$  ni aux extrémités communes des  $d_1'$ ,  $d_2'$ , et dont les points 0 et  $a$  ne font pas partie, quand ils appartiennent à des  $d_1'$  ou à des  $d_2'$ , et qui satisfont à la condition  $S(x) < c_3$ .

Si  $S_3$  existe il est aussi relativement parfait. Pour  $S_3$  on aura  $S(x) > c_2$ . Soit  $d_3$  la mesure de  $S_3$ .

Renfermons  $S_3$  dans des intervalles, nommés  $d_3'$ , en nombre fini, situés sur  $(0, a)$ , n'ayant aucun point intérieur commun avec les  $d_1'$  et  $d_2'$ . Les extrémités des  $d_3'$  qui ne sont pas des extrémités de  $(0, a)$  et des  $d_1'$ ,  $d_2'$ , ne doivent pas être des points de  $S_3$ .

Soit  $d_3 + \varepsilon_3$  la somme des longueurs des  $d_3'$ . Si  $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 + \varepsilon_2 + d_3 < a$  on prendra  $\varepsilon_3 > 0$ , mais  $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 + \varepsilon_2 + d_3 + \varepsilon_3 < a$ .

Lorsque  $S_3$  n'existe pas, les  $d_3'$  peuvent être, si l'on veut, des intervalles arbitraires, ayant d'ailleurs les propriétés déjà signalées ( $d_3 = 0$ !). Et ainsi de suite.

Nous obtiendrons un nombre entier positif  $p \leq k - 1$ , tel que

$$(d_1 + \varepsilon_1) + (d_2 + \varepsilon_2) + \dots + (d_p + \varepsilon_p) + d_{p+1} = a, \\ \varepsilon_1 > 0 \dots \varepsilon_p > 0.$$

Les extrémités des  $d_h'$  forment évidemment une division.

Donc, d'après le No. 1, il existe un nombre entier  $s'$ , tel que pour les  $s \geq s'$ , et tel que pour chaque point de  $d_h'$  on ait:

$$g_{d_h'} - m_s(x) < \frac{\delta}{2}, \quad (h=1, 2, \dots, p),$$

en désignant par  $g_{d_h'}$  la limite inférieure des valeurs de  $S(x)$  pour les points de l'intervalle  $d_h'$  considéré. Bien entendu,  $g_{d_h'}$  varie avec  $h$ , et même  $h$  étant invariable,  $g_{d_h'}$  varie de l'un à l'autre des  $d_h'$ .

b) Soit  $X_I$  la division formée par les points de  $X_n$  et par les extrémités des  $d_h'$ . Formons une division  $X_I'$  qui la contienne et qui ait pour quotient  $\frac{1}{2}$  (No. 9. Chap. II).

La longueur de chaque intervalle de  $X_I'$  est plus grande que  $\frac{a}{2l'}$ . Car s'il en existait un de longueur moindre, la longueur de chacun des autres ne pourrait être plus grande que  $2 \cdot \frac{a}{2l'}$ , la division ayant le quotient  $\frac{1}{2}$  et

$$\frac{a}{2l'} + (l' - 1) \frac{a}{l'} < a.$$

Soit  $e_h'$  le nombre des intervalles de  $X_I'$ , situés dans les intervalles  $d_h'$ , et dans lesquels on ne peut trouver aucun point satisfaisant à la condition

$$S(x) - m_s(x) < \delta.$$

Je dis que  $e_h' \cdot \frac{a}{2l'} > \varepsilon_h$  est impossible.

Pour les points de  $S_h$

$$S(x) - g_{d_h'} < \frac{\delta}{2}.$$

Car pour  $S_h$  on a

$$c_{h-1} < S(x) \leq c_h, \quad c_{h-1} < g_{d_h'} \leq c_h, \quad c_h - c_{h-1} < \frac{\delta}{2},$$

et dans les  $d_h'$  nous avons de plus

$$g_{d_h'} - m_s(x) < \frac{\delta}{2}$$

pour chaque  $x$ . C'est à dire que pour les points de  $S_h$

$$S(x) - m_s(x) < \delta.$$

Donc  $S_h$  ne peut avoir de points dans les intervalles qui sont au nombre de  $e_h'$ .

Donc la mesure de  $S_h$  serait ainsi évidemment plus petite que

$$d_h + \varepsilon_h - e'_h \cdot \frac{a}{2l'} < d_h,$$

ce qui est impossible, la mesure de  $S_h$  étant  $d_h$ .

Donc

$$e'_h \cdot \frac{a}{2l'} \leq \varepsilon_h, \quad \frac{e'_h}{l'} \leq \frac{2\varepsilon_h}{a}.$$

Posons

$$e'_1 + e'_2 + \dots + e'_p = e'.$$

c) Dans chaque intervalle de  $X_{l'}$  qui n'a pas pour extrémité un point de  $X_n$ , nous choisirons un point qui, si cela est possible, satisfasse à la condition

$$S(x) - m_s(x) < \delta.$$

D'après ce qui précède, on ne trouve que  $e'$  points ne satisfaisant pas à cette inégalité.

Formons à l'aide de ces points une division  $X_{l'}$ , ayant le quotient  $\frac{1}{l'}$  et contenant  $X_n$  (No. 10. Chap. II).

Nous aurons ( $e$  étant le nombre désigné dans le théorème du début)

$$e \leq e' + n + 1,$$

car ces points en nombre  $e$  ne peuvent être que points des intervalles (en nombre  $e'$ ) désignés ci-dessus et des points de  $X_n$ .

Mais, lorsque  $l'$  est assez grand, nous aurons

$$l' \geq \frac{l}{4}, \quad (\text{No. 11. Ch. II}).$$

Donc

$$\frac{e}{l'} \leq \frac{4e'}{l'} + \frac{4(n+1)}{l'} \leq \frac{8(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_p)}{a} + \frac{4(n+1)}{l'},$$

en prenant donc

$$\varepsilon_h < \frac{a \cdot \eta}{16k}, \quad l' > \frac{8(n+1)}{\eta}$$

nous aurons

$$e < l \cdot \eta.$$

Le théorème est donc démontré.

2 bis. On voit que, dans le cas où  $S(y)$  reste inférieur à une limite finie, on a le théorème correspondant.

Soit  $X_{i_1}, \dots, X_{i_s}, \dots$  une suite de divisions et soit  $Y_0$  une division quelconque de  $(0, b)$ , donnée à l'avance. On

peut former une division  $Y_m$  qui, ayant le quotient  $\frac{1}{6}$ , contienne  $Y_0$  et dont les points, lorsque  $s$  est plus grand qu'une certaine  $s'$ , satisfont à l'inégalité

$$S(y_j) - l_s(y_j) < \delta,$$

à l'exception de  $f$  points, avec  $f < m \cdot \eta$ .

Pour la construction de  $Y_m$  soient  $D_h'$ ,  $Y_{II}$ ,  $Y_m'$ , les analogues des  $d_h'$ ,  $X_I$  et de  $X_I'$  respectivement.

3. En prenant dans le No. 2  $X_i \equiv X_{i_1}$  au lieu de  $X_n$ , nous obtiendrons un  $X_{i_2}$  et ainsi de suite.

**Théorème.** Il existe donc une suite de divisions  $X_{i_r}$ , ayant le quotient  $\frac{1}{6}$ .  $X_{i_1}$  contient  $X_n$ . En prenant  $s$  assez grand, on a

$$S(x_i) - m_s(x_i) < \delta$$

pour les points de (chaque)  $X_{i_r}$ , à l'exception des points en nombre  $e_r$ , avec  $e_r < l_r \cdot \eta$ .

3bis. Si  $Y_0$  est une division donnée, et si  $X_{i_1}$ ,  $X_{i_2}$ , ...  $X_{i_s}$ , ... est une suite arbitraire de divisions il existe une suite de divisions  $Y_{m_1}$ , ...  $Y_{m_r}$ , ... Cette suite a le quotient  $\frac{1}{6}$ , et  $Y_{m_1}$  contient  $Y_0$ . En prenant  $s$  assez grand, on a l'inégalité

$$S(y_j) - l_s(y_j) < \delta$$

pour les points de (chaque)  $Y_{m_r}$ , à l'exception de  $f_r$  points, avec  $f_r < m_r \cdot \eta$ .

4. Il est aisé de voir qu'on peut prendre la suite  $Y_{m_r}$  du No. 3bis au lieu de la suite  $Y_{m_s}$  du No. 2. De même, la suite  $X_{i_r}$  du No. 3 peut être prise au lieu de la suite  $X_{i_s}$  du No. 2 bis.

Or en prenant  $r$  assez grand, la division  $Y_{m_r}$  du No. 3bis peut remplacer la division  $Y_{m_s}$  du théorème du No. 2, et de même la division  $X_{i_r}$  du No. 3 peut remplacer la division  $X_{i_s}$  du No. 2 bis.

A plus forte raison les divisions qui contiennent respectivement  $Y_{m_r}$  et  $X_{i_r}$  peuvent respectivement remplacer les divisions  $Y_{m_s}$  du No. 2 et  $X_{i_s}$  du No. 2 bis.

5. Prenons donc  $X_{i_r}$  (3) au lieu de  $X_n$  (2) et  $Y_{m_r}$  (3bis) au lieu de  $Y_0$  (2bis). Formons  $X_I$  (2b) et  $Y_{II}$  (2bis). Par l'adjonction de quelques points elles seront «semblables».

On peut donc prendre  $m' = l'$ .

Formons  $X_l$  (2) et  $Y_m$  (2bis).

Alors.

a)  $X_l$  contient  $X_n$  (No. 2).

$Y_m$  contient  $Y_0$  (No. 2bis).

b) Pour les points de  $X_l$  on a

$$S(x_i) - m(x_i) < \delta,$$

à l'exception des points en nombre  $e$ , avec  $e < l \cdot \eta$ .

c) Pour les points de  $Y_m$  on a

$$S(y_j) - l(y_j) < \delta,$$

à l'exception des points en nombre  $f$ , avec  $f < m \cdot \eta$ .

d) La division  $X_l Y_m$  a pour quotient la plus petite des deux quantités  $\frac{b}{144a}, \frac{a}{144b}$ .

Soit par exemple  $b < a$ . L'intervalle le plus petit de  $Y_m$  est  $\geq \frac{b}{6m-5}$ , car  $Y_m$  a le quotient  $\frac{1}{6}$  et

$$\frac{b}{6m-5} + (m-1) \cdot 6 \cdot \frac{b}{6m-5} = b.$$

De même, l'intervalle le plus grand de  $X_l$  est  $\leq \frac{6a}{l+5}$ .

Mais

$$l' \geq l \geq \frac{l'}{4}, \quad m' \geq m \geq \frac{m'}{4}, \quad m' = l'.$$

Donc:

$$\frac{b}{6m-5} : \frac{6a}{l+5} = \frac{b}{6a} \cdot \frac{l+5}{6m-5} \geq \frac{b}{6a} \cdot \frac{l'}{6l'} = \frac{1}{144} \cdot \frac{b}{a}.$$

6. On obtient enfin le théorème fondamental:

Soient  $\delta_r, \eta_r$  positifs et soit

$$\lim \delta_r = 0, \quad \lim \eta_r = 0, \quad (r = \infty).$$

Il existe une suite de divisions  $X_{l_r} Y_{m_r}$  à quotient fini, telle que les points de  $X_{l_r}$ , à l'exception de quelques-uns qui sont en nombre  $e_r$ , satisfont à la condition

$$S(x_i) - m_r(x_i) < \delta_r$$

et

$$e_r < l_r \cdot \eta_r.$$

Les points de  $Y_{m_r}$ , à l'exception de quelques-uns qui sont en nombre  $f_r$ , satisfont à la condition

$$S(y_j) - l_r(y_j) < \delta_r$$

et

$$f_r < m_r \cdot \eta_r.$$

De plus  $X_{l_r}$  et  $Y_{m_r}$  peuvent respectivement contenir une division  $X_{n_r}$ ,  $Y_{0_r}$ , donnée à l'avance.\*

On peut, si l'on veut, prendre  $\eta_r = \delta_r$ .

Nous ferons ce choix, et nous supposons de plus

$$\delta_r > \delta_{r+1}, \quad \delta_1 < 1.$$

7. Si dans la démonstration du No. 2 on fait abstraction de la surface et si on ne considère  $S(x)$  que comme une fonction semicontinue, on voit qu'en prenant  $\delta$  assez petit et  $l'$  assez grand,

$$\frac{1}{2} X_i(S(x_i) + S(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i)$$

diffère aussi peu que l'on veut de

$$\int_0^a S(x) dx.$$

On peut donc former certaines suites de divisions (à quotient fini), telles que l'on ait pour une fonction  $\psi(x)$  bornée et semicontinue

$$\frac{1}{2} X_{\infty}(\psi(x_i) + \psi(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) = \int_0^a \psi(x) dx.$$

Remarquons que le théorème précédent est également vrai pour la fonction semicontinue non bornée supérieurement, mais bornée inférieurement et telle que

$$\psi(0) < +\infty, \quad \psi(a) < +\infty, \quad \int_0^a \psi(x) dx < +\infty.$$

8. Pour arriver au théorème du No. 6, nous pouvons appliquer aussi la méthode suivante qui est plus méthodique.

a) On démontre le théorème du No. 7.

---

\* Voir la note du Chap. I. et la fin du Chap. IX.

b) Soit  $\psi(x)$  une fonction semicontinue bornée et non négative, et soit  $X_{l_r}$  une suite de divisions telle que l'on ait

$$\frac{1}{2} X_{l_r} (\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})) (x_{i+1} - x_i) = \int_0^a \psi(x) dx.$$

Soit  $\lambda$  un nombre positif, donné à l'avance. Soit  $A$  un ensemble dénombrable et partout dense des points dans  $(0, a)$ .

On peut choisir un nombre limité de points de  $A$ , tel que si  $x'$  et  $x'' > x'$  en sont deux points quelconques voisins  $x'' - x'$  est plus petit qu'un nombre positif donné à l'avance, et tel que pour les points de  $X_{l_r}$ , contenus dans  $(x', x'')$ , pour les  $r$  assez grands, on ait

$$\psi(x_i) - g^\psi(x', x'') < \lambda,$$

à l'exception de certains d'entre eux.

Pour ces points exceptionnels la valeur de

$$d \cdot \sum (x_{i+1} - x_{i-1}) \quad (x_{-1} = 0, x_{l_r+1} = a)^*$$

est plus petite que  $\lambda$ , — la somme étant étendue à tous les intervalles  $(x', x'')$  et à tous les points exceptionnels —  $d$  étant la limite supérieure des valeurs de  $\psi(x)$ .

c) On démontre le théorème du No. 9 du Chap. X, et on conclut par là que si l'on avait pour une suite  $X_{l_r}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} X_{l_r} (\psi(x_i) + \varphi(x_i) + \psi(x_{i+1}) + \varphi(x_{i+1})) (x_{i+1} - x_i) \\ = \int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)] dx \end{aligned}$$

on aurait

$$\frac{1}{2} X_{l_r} [\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})] (x_{i+1} - x_i) = \int_0^a \psi(x) dx,$$

$$\frac{1}{2} X_{l_r} [\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1})] (x_{i+1} - x_i) = \int_0^a \varphi(x) dx.$$

\* Désignons par  $e$  le nombre des points exceptionnels. La suite  $X_{l_r}$  a un quotient fini. Il existe donc une constante positive  $C$ , telle que

$$(x_{i-1} - x_{i-1}) > \frac{C}{l_r}.$$

Par là

$$d \cdot e \cdot \frac{C}{l_r} < \lambda, \quad e < l_r \eta, \quad \eta = \frac{\lambda}{d \cdot C}.$$

d) En appliquant les théorèmes a) c) et b) à la fonction

$$S_y(x, b) + S_x\left(a, \frac{b}{a} \cdot x\right),$$

et en faisant usage du théorème du No. 1, on obtient le théorème du No. 6, en prenant  $m_r = l_r$ ,  $y_j = \frac{b}{a} \cdot x_j$ .

e) On obtient, par des considérations analogues sur les fonctions semicontinues bornées inférieurement, le théorème suivant:

Soit l'aire de  $z = f(x, y)$  finie, et soit de plus la longueur de son contour finie.

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\delta_r > 0$ , avec  $\lim_{r=\infty} \delta_r = 0$ , des nombres donnés à l'avance.

On peut construire une suite de divisions à quotient fini  $X_{l_r} Y_{m_r}$ , telle que,  $K$  étant une constante choisie arbitrairement au delà d'une certaine limite ne dépendant que de  $\varepsilon$ , on ait pour les points  $x_i$  de  $X_{l_r}$  vérifiant  $S(x_i) \leq K$ ,

$$S(x_i) - m_r(x_i) < \delta_r$$

à l'exception de certains d'entre eux et on a comme dans

b)  $K \sum (x_{i+1} - x_{i-1}) < \delta_r$ .

Pour les points diviseurs pour lesquels  $S(x_i) > K$  la somme des valeurs

$$S(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}),$$

est plus petite que  $\varepsilon$ .

Des relations analogues subsistent pour les points de  $Y_{m_r}$ .

On observe que la somme des aires des rectangles de  $X_{l_r} Y_{m_r}$  pour lesquels l'une des côtés est une ligne diviseuse  $x_i$  ou  $y_j$  pour laquelle on ait  $S(x_i) > K$  ou  $S(y_j) > K$ , est plus petite que  $2\varepsilon$ .

f) Étant données des surfaces  $f^1, f^2, \dots$  en nombre limité, on peut construire une suite de divisions  $X_{l_r} Y_{m_r}$  ayant respectivement les propriétés de e) ou celle du théorème du No. 6. De plus, étant données de fonctions semicontinues bornées  $s_y(x)$  et  $s_x(y)$ , définies respectivement dans  $(0, a)$  et dans  $(0, b)$ ,  $X_{l_r}$  et  $Y_{m_r}$  peuvent respectivement satisfaire au théorème 7), relativement à  $s_y(x)$ ,  $s_x(y)$ .

9. Une propriété nouvelle et générale des fonctions d'une variable.

Soit  $z = \varphi(x)$  une fonction bornée, uniforme ou non, et soit  $\varphi(x) \geq 0$ .

Il est évident que, par l'addition d'une constante positive suffisamment grande, on pourra imposer à chaque fonction bornée les propriétés de  $\varphi$ .

Soit  $g_i$  et  $G_i$  les limites inférieure et supérieure des valeurs de  $\varphi$  pour les points de  $(x_i, x_{i+1})$  et soit

$$g(x) = {}^0X^x g_i \cdot (x_{i+1} - x_i), \quad G(x) = {}^0X^x G_i \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

$$g(0) = 0, \quad G(0) = 0.$$

$$\text{On aura} \quad g(x) \leq G(x)$$

et  $g(x)$ ,  $G(x)$  sont des fonctions (uniformes) bornées, continues, non décroissantes — ce sont les intégrales par défaut et par excès de  $\varphi(x)$ , d'après la définition de M. DARBOUX.

Si, pour une certaine suite  $X_{i_r}$ , l'expression

$$\frac{1}{2} {}^0X^x (\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i)$$

existe pour chaque  $x$  dans  $(0, a)$  (faisant un choix ou non entre les valeurs de  $\varphi(x_i)$  lorsque la fonction n'est pas uniforme) cette quantité est nécessairement comprise entre  $g(x)$  et  $G(x)$ .

Et si  $x_1 > x$ , on a

$$0 \leq g(x_1) - g(x) \leq \frac{1}{2} {}^xX^{x_1} (\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) \leq G(x_1) - G(x).$$

Soit  $\mu(x)$  une fonction continue, avec  $\mu(0) = 0$ , et telle que pour chaque  $x_1$  et  $x$  ( $x_1 > x$ ) on ait

$$g(x_1) - g(x) \leq \mu(x_1) - \mu(x) \leq G(x_1) - G(x).$$

**Théorème.** Il existe, dans ces conditions, une suite de divisions (de première espèce)  $X_{i_r}$  pour laquelle

$$\frac{1}{2} {}^0X_{i_\infty}^x (\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) = \mu(x),$$

mais on doit remarquer que le choix de la valeur de  $\varphi(x_i)$ , lorsque  $\varphi$  n'est pas uniforme pour  $x = x_i$ , n'est pas arbitraire.

**Remarque.**  $\mu$  est une fonction dont les nombres dérivés sont bornés.

En étendant ces discussions à certaines fonctions non bornées,  $\mu$  pourra être non seulement une fonction continue à nombres dérivés non bornés mais de plus une fonction discontinue.

## Chapitre VIII.

## Quadrature à l'aide des quadrilatères gauches.

1. Nous emploierons fréquemment, dans ce qui va suivre, les signes  $\overset{m}{=}$ ,  $\overset{m}{<}$ ,  $\overset{m}{>}$ , dont la signification est la suivante. Soit posée par exemple l'inégalité affectée du signe  $m$

$$a - b \overset{m}{<} c.$$

On doit multiplier — l'une des quantités,  $b$  par exemple, par un certain facteur  $B$  pour obtenir une inégalité ordinaire et exacte

$$a - B \cdot b < c.$$

L'inégalité dénuée du signe  $m$

$$a - b < c$$

pourra en soi être inexacte.

Dans les cas que nous allons rencontrer, nous saurons toujours quelles sont les quantités que l'on doit multiplier et de plus nous verrons que, quoique la valeur du facteur varie d'une inégalité à l'autre, tous ces facteurs sont compris entre deux limites  $U$  et  $V$ , telles que

$$+\infty > U \geq 1 \geq V > 0.$$

On pourrait même déterminer la valeur de chacun de ces facteurs et de  $U$  et  $V$ , mais cela est inutile. Dans les conclusions que nous aurons à tirer, il suffira de savoir que  $U$  n'est pas égal à  $+\infty$  et que  $V$  n'est pas égal à 0.

Nous éviterons ainsi la détermination effective et l'écriture de certaines valeurs, ce qui donnera plus de brièveté.

2. Nous écrirons, par exemple, pour la division du No. 6 du Chap. VII qui a un quotient fini,

$$l_r \overset{m}{=} m_r \overset{m}{=} q_r, \quad x_{i+1} - x_i \overset{m}{=} \frac{1}{q_r} \overset{m}{=} y_{j+1} - y_j, \quad \alpha_{i,j} \overset{m}{=} \frac{1}{q_r^2}.$$

(voir No. 16 Chap. II)

Pour notre surface on a, à cause de la condition relative à  $G$ :

$$s_{i,j}^y \overset{m}{=} \frac{1}{q_r}, \quad d_{i,j}^y \overset{m}{=} \frac{1}{q_r}, \quad b_{i,j} \overset{m}{\leq} \frac{1}{q_r^2}, \\ \beta_{i,j} \overset{m}{\leq} \frac{1}{q_r^2}, \quad A_2 B_2 C_2 + A_2 D_2 C_2 \overset{m}{\leq} \frac{1}{q_r^2}.$$

Mais on doit écrire

$$s_{i,j}^x \geq \frac{1}{q_r}, \quad \bar{s}_{i,j}^x \geq \frac{1}{q_r}, \quad c_{i,j}^m \geq \frac{1}{q_r^2},$$

$$\gamma_{i,j} \geq \frac{1}{q_r^2}, \quad A_3 B_3 C_3 + A_3 D_3 C_3 \geq \frac{1}{q_r^2},$$

car par exemple  $c_{i,j} \cdot q_r^2$ , peut avoir une valeur positive quelconque.

3. Nous supposons dans ce qui suit, qu'il existe pour la surface  $z = f(x, y)$  une constante  $\bar{S}$ , telle que

$$S(x) < \bar{S}, \quad S(y) < \bar{S}.$$

La suite  $X_{l_r} Y_{m_r}$  sera toujours, dans ce qui suit, celle du No. 6 du Chap. VII.

Choisissons un nombre positif entier  $p < r$ , et divisons les rectangles de  $X_{l_r} Y_{m_r}$  en deux classes.

La première classe contiendra ceux où les arcs

$$\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$$

sont plus petits que  $\frac{1}{q_r \cdot \delta_p}$ .

La deuxième classe contiendra le reste, c'est-à-dire les rectangles où l'un au moins des arcs

$$\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$$

n'est pas plus petit que  $\frac{1}{q_r \cdot \delta_p}$ .

Soit pour les rectangles de la première classe  $\lambda_{i,j} = 1$ , pour la deuxième  $\lambda_{i,j} = 0$ , et soit

$$\lambda_{i,j} + \varepsilon_{i,j} = 1.$$

Nous allons montrer que, lorsque  $p$  croît indéfiniment de manière que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

nous aurons:

- A)  $X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \varepsilon_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} = 0,$
- B)  $X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} (\theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y) = 0,$
- C)  $X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} |\tau_{i,j} - n_{i,j}| = 0,$
- D)  $X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} |t_{i,j} - n_{i,j}| = 0,$

et pour notre surface caractérisée par  $G$ :

$$E) \quad X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (\theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y) = 0,$$

$$F) \quad X_{l_\infty} Y_{m_\infty} |\tau_{i,j} - n_{i,j}| = 0,$$

$$G) \quad X_{l_\infty} Y_{m_\infty} |t_{i,j} - n_{i,j}| = 0,$$

$$H) \quad X_{l_\infty} Y_{m_\infty} n_{i,j} = t.$$

Démonstrations.

A) Supposons que la section  $x_i = \text{const.}$  contienne des  $s''_{i,j}$  en nombre de  $E_i$ , tels que  $s''_{i,j} \geq \frac{1}{q_r \cdot \delta_p}$ . On a évidemment

$$E_i \cdot \frac{1}{q_r \cdot \delta_p} \leq S(x_i) < \bar{S},$$

donc

$$E_i \stackrel{m}{<} q_r \cdot \delta_p.$$

Le nombre des sections  $x_i = \text{const.}$  est  $l_r + 1 = q_r$  et chacun des  $s''_{i,j}$  appartient à deux rectangles (excepté les arcs sur  $x_i = 0$  et sur  $x_i = a$ ).

Donc le nombre des rectangles auxquels appartient au moins un

$$s''_{i,j} \geq \frac{1}{q_r \cdot \delta_p} \quad \text{est} \quad < \stackrel{m}{2} \cdot q_r^2 \cdot \delta_p^m = q_r^2 \cdot \delta_p^m.$$

De même le nombre des rectangles auxquels appartient au moins un

$$s^x_{i,j} \geq \frac{1}{q_r \cdot \delta_p} \quad \text{est} \quad < \stackrel{m}{q_r^2 \cdot \delta_p^m}.$$

Ainsi le nombre des rectangles où

$$\varepsilon_{i,j} = 1 \quad \text{est} \quad \leq \stackrel{m}{q_r^2 \cdot \delta_p^m}.$$

Mais  $\alpha_{i,j} = \frac{1}{q_r^2}$ . Donc

$$X_{l_r} Y_{m_r} \varepsilon_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} \leq \stackrel{m}{\delta_p^m},$$

et on a

$$\lim_{r=\infty} \delta_p = 0.$$

B) Il suffit de démontrer que

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} \cdot \theta_{i,j}^x = 0.$$

On a évidemment

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot \theta_{i,j}^x = Y_{m_r} (X_{l_r} \cdot \lambda_{i,j} \cdot \theta_{i,j}^x).$$

Les sections  $y_j = \text{const.}$  sont de deux espèces, selon qu'elles satisfont ou non à l'inégalité

$$S(y_j) - l_r(y_j) < \delta_r, \quad (\text{No. 6 Chap. VII}).$$

D'après le No. 20 du Chap. III on aura, pour la première espèce:

$$\begin{aligned} X_{l_r} \lambda_{i,j} \cdot \theta_{i,j}^x &< X_{l_r} \cdot \lambda_{i,j} \frac{1}{q_r^{\frac{3}{2}} \cdot \delta_p^{\frac{3}{2}}} (\delta_{i,j}^x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{q_r^{\frac{3}{2}} \cdot \delta_p^{\frac{3}{2}}} \cdot X_{l_r} \cdot \lambda_{i,j} \cdot (\delta_{i,j}^x)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{q_r^{\frac{3}{2}} \cdot \delta_p^{\frac{3}{2}}} \cdot q_r^{\frac{1}{2}} \cdot \delta_r^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{q_r} \cdot \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

(voir encore No. 5 Chap. IV).

Le nombre de ces sections étant  $m_r + 1 - f_r = q_r$ , la contribution de ces sections à

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \theta_{i,j}^x \text{ est } \leq \frac{m}{\delta_p^{\frac{3}{2}}} \cdot \delta_r^{\frac{1}{2}}.*$$

Le nombre des sections de la deuxième espèce est  $f_r$ , et on a pour ces sections, d'après le No. 20 du Chap. III:

$$\begin{aligned} X_{l_r} \lambda_{i,j} \theta_{i,j}^x &< X_{l_r} \lambda_{i,j} (x_{i+1} - x_i) s_{i,j}^x \leq X_{l_r} \lambda_{i,j} \cdot \frac{1}{q_r} s_{i,j}^x \\ &< \frac{m}{q_r} X_{l_r} \lambda_{i,j} s_{i,j}^x < \frac{m}{q_r} \cdot \bar{S} < \frac{m}{q_r}. \end{aligned}$$

Donc la contribution des sections est  $\leq \frac{m}{q_r} \frac{f_r}{q_r} < \delta_r$ . En consi-

dérant que  $\delta_r < \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}}$ , on aura

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \theta_{i,j}^x \leq \frac{m}{\delta_p^{\frac{3}{2}}} \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{q_r},$$

et par hypothèse

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

C) On a d'après le No. 17 du Chap. III:

$$|\tau_{i,j} - n_{i,j}| \leq \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y.$$

\* En employant l'inégalité  $\theta_{i,j}^x < \pi (s_{i,j}^x)^2$  on trouve que cette contribution est

$$\leq f_r \cdot q_r \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_p^2} = \frac{f_r}{q_r} \cdot \frac{1}{\delta_p^2} < \frac{\delta_r}{\delta_p^2} < \frac{\delta_r}{\delta_p^2} < \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} | \tau_{i,j} - n_{i,j} | \leq \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}}.$$

Et ainsi

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \lambda_{i,j} | \tau_{i,j} - n_{i,j} | = 0.$$

D) On a, d'après le Chap. VI:

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} (t_{i,j} - \tau_{i,j}) = 0$$

et à plus forte raison

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \lambda_{i,j} (t_{i,j} - \tau_{i,j}) = 0,$$

donc après C)

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \lambda_{i,j} | t_{i,j} - n_{i,j} | = 0.$$

E) Cela est évident d'après B); car ayant

$$s_{i,j}^y = \frac{1}{q_r},$$

on aura, si  $p$  dépasse une certaine limite,

$$s_{i,j}^y < \frac{1}{q_r \cdot \delta_p}.$$

F), G), H) Il suffit de démontrer que

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \varepsilon_{i,j} | \tau_{i,j} - n_{i,j} | = 0$$

On a

$$\gamma_{i,j} < \tau_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + \beta_{i,j} + \gamma_{i,j},$$

$$c_{i,j} < n_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j},$$

et (voir No. 17 Chap. III)

$$| c_{i,j} - \gamma_{i,j} | \leq \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y.$$

Ainsi  $\tau_{i,j}$  et  $n_{i,j}$  sont compris entre

$$\gamma_{i,j} - \theta_{i,j}^y - \theta_{i+1,j}^y$$

et

$$\alpha_{i,j} + b_{i,j} + \beta_{i,j} + \gamma_{i,j} + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y.$$

Donc

$$| \tau_{i,j} - n_{i,j} | \leq \alpha_{i,j} + b_{i,j} + \beta_{i,j} + 2(\theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y).$$

Mais pour notre surface

$$\alpha_{i,j} \stackrel{m}{>} b_{i,j}, \quad \alpha_{i,j} \stackrel{m}{>} \beta_{i,j}.$$

Donc

$$X_{l_r} Y_{m_r} \varepsilon_{i,j} | \tau_{i,j} - n_{i,j} | \leq X_{l_r} Y_{m_r} \varepsilon_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} \\ + 2 X_{l_r} Y_{m_r} \varepsilon_{i,j} (\theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y).$$

mais d'après A) et E) les deux termes du second membre tendent vers zéro pour  $r = \infty$ .

L'équation

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} n_{i,j} = t$$

exprime que la quadrature de notre surface est obtenue à l'aide des quadrilatères gauches. (Voir le remarque du Chap. VI).

## Chapitre IX.

### Quadrature.

Dans ce que suit nous imposerons à la surface  $z = f(x, y)$  l'unique condition suivante: Il existe un nombre positif fini  $\bar{S}$  tel que

$$S(x) < \bar{S}, \quad S(y) < \bar{S}.$$

Nous indiquerons le moment où nous allons revenir à notre première surface.

1. Il est évident qu'en omettant certains termes de la suite du No. 6 du Chap. VII, on peut obtenir une autre suite (nous la désignerons aussi par  $X_{i_r} Y_{m_r}$ ), telle que l'on ait

$$\frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}} < \delta_{r-1}^8 *$$

et

$$X_{i_r} Y_{m_r} (t_{i,j} - \tau_{i,j}) < \delta_{r-1}^8.$$

Le but de ce Chapitre est de démontrer que pour cette suite

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} n_{i,j} |t_{i,j} - (ABC + ADC)| = 0, \quad (p = r - 1),$$

et pour notre première surface

$$X_{l_{\infty}} Y_{\infty} (ABC + ADC) = t,$$

$ABC$  et  $ADC$  désignant les aires des triangles dont les sommets sont respectivement  $A, B, C$  et  $A, D, C$ , du No. 8 du Chap. III.

Nous devons, pour démontrer ces théorèmes, faire des discussions assez longues.

---

\* On voit que la condition  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\delta_p^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}} = 0$ , du No. 3 du Chap. VIII, est remplie pour  $p = r - 1$ .

Pour chaque division de la suite nous prendrons  $q_r$  (No. 16. Chap. II) de sorte que  $q_r$ , quoique choisi arbitrairement entre ses limites de variations, ait toujours la même valeur, une fois ce choix fait. On peut prendre  $q_r = l_r$ .

Nous partagerons les rectangles de  $X_{l_r} Y_{m_r}$  où  $\lambda_{i,j} = 1$  en cinq groupes:

Le premier groupe contient tous les rectangles pour lesquels

$$(t_{i,j} - \tau_{i,j}) + (\theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y) \geq \frac{1}{q_r^2} \delta_{r-1}^6.$$

En désignant par  $L_r$  le nombre de ces rectangles, on aura

$$\frac{L_r}{q_r^2} <^m \delta_{r-1}^2.$$

On a

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot (t_{i,j} - \tau_{i,j}) < \delta_{r-1}^8,$$

et d'après le Chap. VIII

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} (\theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y) <^m \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}} < \delta_{r-1}^8.$$

Nous aurons

$$L_r \cdot \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6 < X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} ((t_{i,j} - \tau_{i,j}) + (\theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y)) <^m \delta_{r-1}^8,$$

ou enfin

$$\frac{L_r}{q_r^2} <^m \delta_{r-1}^{2\frac{1}{2}}.$$

Le deuxième groupe contient les rectangles pour lesquels

$$q_r^2 \cdot b_{i,j} > \delta_{r-1}, \quad q_r^2 \cdot c_{i,j} > \delta_{r-1}.$$

Le troisième, ceux pour lesquels

$$q_r^2 \cdot b_{i,j} > \delta_{r-1}, \quad q_r^2 \cdot c_{i,j} \leq \delta_{r-1}.$$

Le quatrième, ceux pour lesquels

$$q_r^2 \cdot b_{i,j} \leq \delta_{r-1}, \quad q_r^2 \cdot c_{i,j} > \delta_{r-1}.$$

Et enfin le cinquième, ceux qui restent et pour lesquels

$$q_r^2 \cdot b_{i,j} \leq \delta_{r-1}, \quad q_r^2 \cdot c_{i,j} \leq \delta_{r-1}.$$

Chaque rectangle n'appartient, bien entendu, qu'à un seul de ces groupes. Quelquefois quelques-uns de ces groupes n'existent

pas, et le nombre des rectangles de chacun des quatre derniers groupes est  $\leq q_r^2$ .

2. Lorsque  $r$  est assez grand, les lignes  $\overline{A_2 D_2}$  et  $B_2 C_2$  ne se coupent pas pour les groupes second et troisième, c'est à dire que  $A_2 B_2 C_2 D_2$  est un trapèze ou un parallélogramme (Voir Chap. III).

Supposons que les lignes  $A_2 D_2$  et  $B_2 C_2$  se coupent en un point  $O_2$ .

Supposons par exemple que la distance de  $O_2$  de  $A_2 B_2$  soit au plus égale à la distance de  $O_2$  de  $C_2 D_2$ .

Soit  $x'$  la coordonnée  $x$  de  $O_2$ . La ligne  $x = x'$ ,  $z = 0$  partage le rectangle  $A_1 B_1 C_1 D_1$  en deux autres.

Celui de ces rectangles qui a un sommet en  $C_1$  a évidemment une aire égale ou supérieure à  $\frac{\alpha_{i,j}}{2}$ .

Pour ce rectangle la valeur formée à la manière de  $t_{i,j} - \tau_{i,j}$  est plus petite que

$$\frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^2.$$

Partageons ce rectangle en deux parties égales à l'aide d'une droite parallèle à l'axe  $y$ .

Soient, pour ces deux rectangles,  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  et  $\alpha$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$  les valeurs respectivement formées à la manière des  $\alpha_{i,j}$ ,  $\beta_{i,j}$ ,  $\gamma_{i,j}$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ , appartiennent au rectangle qui est plus près de l'axe  $y$ .

Les valeurs analogues pour le rectangle divisé en deux parties égales sont alors  $2\alpha$ ,  $\beta_1 + \beta_2$ ,  $\gamma_1 + \gamma_2 - \varepsilon$ , ( $\gamma_1 + \gamma_2 \geq \varepsilon$ ).

Dans l'équation

$$[\alpha^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2]^{\frac{1}{2}} + [\alpha^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ = [4\alpha^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2 - \varepsilon)^2]^{\frac{1}{2}} + \lambda,$$

$\lambda$  n'est pas négatif (Chap. IV) et

---

\* Car d'après le No. 1 la valeur de  $t_{i,j} - \tau_{i,j}$ , pour  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$  est  $< \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^2$ . Et l'on a vu, dans le Chap. VI, qu'en partageant un rectangle en plusieurs autres, la somme des  $t_{i,j} - \tau_{i,j}$  pour ces rectangles n'est pas plus grande que pour le rectangle total.

$$\lambda < \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6 \cdot *$$

D'après le No. 4 du Chap. IV, et en remarquant que  $\alpha = \frac{1}{q_r^2}$   
et que chacune de quantités  $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  est  $\leq \frac{1}{q_r \cdot \delta_{r-1}}$ , \*\*

\* Désignons par  $t'$  et  $t''$  les valeurs de  $t_{i,j}$  pour les deux rectangles, les analogues de  $\tau_{i,j}$  sont les radicaux ( $\tau', \tau''$ ) du premier membre de l'équation, et pour le rectangle total  $t_{i,j}$  est  $t' + t''$  et  $\tau_{i,j}$  le radical du second membre  $\tau$ . On a, d'après la note précédente:

$$t_{i,j} - \tau_{i,j} \geq (t' + t'') - \tau \geq t' - \tau' + t'' - \tau'' \geq 0.$$

Donc

$$t_{i,j} - \tau_{i,j} \geq (t' + t'') - \tau - [t' - \tau' + t'' - \tau''] = \tau' + \tau'' - \tau = \lambda$$

et on a

$$t_{i,j} - \tau_{i,j} < \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6 \cdot$$

\*\* D'après le Chap. VI les  $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ , sont plus petits que  $t_{i,j}$ .

Mais

$$t_{i,j} = \tau_{i,j} + (t_{i,j} - \tau_{i,j}), \quad \tau_{i,j} \leq n_{i,j} + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y, \\ n_{i,j} \leq \alpha_{i,j} = b_{i,j} + c_{i,j}.$$

Donc

$$t_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j} + (t_{i,j} - \tau_{i,j}) + (\theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y).$$

Mais

$$b_{i,j} \leq \frac{1}{2}(\widehat{A_2 B_2} + D_2 \widehat{C_2})(x_{i+1} - x_i) < \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{DC})(x_{i+1} - x_i) \\ \leq \frac{1}{q_r \cdot \delta_{r-1}} \cdot \frac{1}{q_r} + \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}}$$

et de même

$$c_{i,j} \leq \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}}.$$

Donc encore d'après le No. 1

$$t_{i,j} \leq \frac{1}{q_r^2} + \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}} + \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6 \leq \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}},$$

et ainsi  $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  sont  $\leq \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}}$ .

on obtient

$$|\beta_2 - \beta_1| \leq \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Mais par des considérations géométriques simples

$$\beta_2 \geq \frac{3}{4} O_2 C_2 D_2 - \theta_{i,j}^x - \theta_{i,j+1}^x,$$

$$\beta_1 \leq \frac{1}{4} O_2 C_2 D_2 + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x,$$

$$O_2 C_2 D_2 \geq \frac{m}{q_r^2} \delta_{r-1},$$

et comme toujours

$$\theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x < \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1},$$

on aura pour des valeurs de  $r$  assez grands

$$\beta_2 \geq \frac{3}{4} O_2 C_2 D_2 - \theta_{i,j}^x - \theta_{i,j+1}^x \geq \frac{1}{4} O_2 C_2 D_2 + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x \geq \beta_1.$$

C'est à dire

$$0 \leq \frac{1}{2} O_2 C_2 D_2 - 2(\theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x) < \beta_2 - \beta_1 \leq \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

ou

$$\frac{\delta_{r-1}}{q_r^2} = \frac{\delta_{r-1}^6}{q_r^2} \leq \frac{m}{q_r^2} \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

ou encore

$$\delta_{r-1} \leq \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

mais cela est impossible pour un  $r$  assez grand.

Or, dans ce cas,  $\overline{A_2 D_2}$  et  $B_2 C_2$  ne peuvent pas se couper. De même, lorsque  $q_r^2 \cdot c_{i,j} > \delta_{r-1}$ ,  $A_3 B_3$  et  $C_3 D_3$  ne peuvent pas se couper.

3) Soient  $K, P, Q, R, S$  les valeurs des sommes des

$$(ABC + ADC) - n_{i,j}$$

formées pour les rectangles des cinq groupes du No. 1.

\* En posant dans l'inégalité 4 du Chap. IV

$$D = \frac{m}{q_r^2} \frac{1}{\delta_{r-1}}, \quad \lambda < \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6,$$

on trouve que le premier membre est

$$< \frac{1}{q_r^4} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Le premier membre étant  $|\alpha\beta_2 - \alpha\beta_1|$  si l'on divise par  $\alpha = \frac{m}{q_r^2}$ , on obtient l'inégalité ci-dessus.

Nous allons démontrer que  $K, P, Q, R, S$  sont

$$\leq^m \delta_{r-1}.$$

a) On a

$$K \leq^m \delta_{r-1}.$$

Car pour le premier groupe même la somme des valeurs

$$(ABC + ADC), \quad n_{i,j}$$

est

$$\leq^m \delta_{r-1}^2.$$

Le nombre des rectangles du premier groupe est

$$L_r <^m g_r^2 \cdot \delta_{r-1}^2,$$

et on trouve que

$$ABC + ADC \leq^m \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}}, \quad n_{i,j} \leq^m \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}}.$$

Donc les deux sommes en question sont

$$\leq^m \delta_{r-1}.$$

b) Pour le deuxième groupe on a

$$P \leq^m \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Dans ce cas  $\overline{A_2 D_2}$  et  $\overline{B_2 C_2}$  et de même,  $\overline{A_3 B_3}$  et  $\overline{C_3 D_3}$  ne se coupent pas (No. 2).

On a

$$(A_2 B_2 C_2 D_2) = b_{i,j} > \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2}.$$

De l'expression de l'aire du trapèze  $A_2 B_2 C_2 D_2$  on déduit

$$\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2} \geq^m \frac{\delta_{r-1}}{q_r}.$$

Soit  $E_2$  le milieu de  $\overline{A_2 D_2}$ ,  $F_2$  le milieu de  $\overline{B_2 C_2}$ . En employant l'inégalité

$$|\beta_2 - \beta_1| <^m \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}$$

du No. 2\* on obtient:

\* On ne doit que répéter les considérations du No. 2 en les appliquant au rectangle  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$  découpé par la ligne  $x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$  en deux parties égales ( $x' = x_i$ ).

$$|(A_2 B_2 F_2 E_2) - (E_2 F_2 C_2 D_2)| < \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^3 \cdot *$$

Mais en considérant l'expression des aires des trapèzes  $A_2 B_2 F_2 E_2$  et  $E_2 F_2 C_2 D_2$ , et en se rappelant que

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{4} = \frac{1}{q_r},$$

on obtient

$$|A_2 B_2 - C_2 D_2| < \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^3.$$

A l'aide de

$$\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2} \geq \frac{m}{q_r} \delta_{r-1} > \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

on obtient

$$A_2 B_2 + C_2 D_2 \geq 2 \overline{A_2 B_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0,$$

$$A_2 \overline{B_2} + \overline{C_2 D_2} \geq 2 C_2 \overline{D_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0.$$

Et de même, lorsque  $q_r^2 \cdot c_{i,j} > \delta_{r-1}$ ,

$$\overline{A_3 D_3} + \overline{B_3 C_3} \geq 2 \overline{A_3 D_3} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0,$$

$$A_3 \overline{D_3} + \overline{B_3 C_3} \geq 2 \overline{B_3 C_3} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0.$$

Il est évident que pour obtenir une inégalité ordinaire, on doit multiplier seulement  $\frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}$ , c'est à dire que pour les rectangles du deuxième groupe on a:

$$\begin{aligned} n_{i,j} &= [\alpha_{i,j}^2 + (\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(A_2 B_2 + \overline{C_2 D_2}))^2 \\ &\quad + (\frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)(\overline{A_3 D_3} + \overline{B_3 C_3}))^2]^{\frac{1}{2}}, \\ n_{i,j} &\geq \frac{m}{\left[ \alpha_{i,j}^2 + \left( \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \left( 2 \overline{A_2 B_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} \right) \right)^2 \right.} \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j) \left( 2 \overline{B_3 C_3} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

\* On a, par des considérations géométriques:

$$\begin{aligned} |(A_2 B_2 F_2 E_2) - (E_2 F_2 C_2 D_2)| &\leq |\beta_2 - \beta_1| + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x \\ &\leq \frac{m}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6 \leq \frac{m}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

$$n_{i,j} \stackrel{m}{\geq} [\alpha_{i,j}^2 + (x_{i+1} - x_i) \overline{A_2 B_2}^2 + (y_{j+1} - y_j) \overline{B_3 C_3}^2]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}, *$$

$$n_{i,j} \stackrel{m}{\geq} 2ABC - \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}$$

et de même

$$n_{i,j} \stackrel{m}{\geq} 2ADC - \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Donc

$$n_{i,j} \stackrel{m}{\geq} (ABC + ADC) - \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}$$

et l'on doit multiplier seulement

$$\frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Mais on a

$$n_{i,j} \leq ABC + ADC.$$

Donc

$$(ABC + ADC) - n_{i,j} \stackrel{m}{\leq} \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Le nombre des rectangles étant  $\stackrel{m}{\leq} q_r^2$ , on aura

$$P \stackrel{m}{\leq} \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} < \delta_{r-1}^m.$$

c) Dans le troisième groupe nous aurons

$$Q \stackrel{m}{\leq} \delta_{r-1}.$$

Pour ce groupe on a  $q_r^2 \cdot b_{i,j} > \delta_{r-1}$ ,  $q_r^2 \cdot c_{i,j} \leq \delta_{r-1}$ . Or  $\overline{A_2 D_2}$  et  $\overline{B_2 C_2}$  ne se coupent pas et on a comme précédemment

$$\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2} \stackrel{m}{\geq} 2 \overline{A_2 B_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0,$$

$$\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2} \stackrel{m}{\geq} 2 \overline{C_2 D_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0.$$

Les droites (limitées)  $\overline{A_3 B_3}$ ,  $\overline{C_3 D_3}$  peuvent se couper ou non. Lorsqu'elles ne se coupent pas, on a

$$c_{i,j} = \frac{\overline{A_3 D_3} + \overline{B_3 C_3}}{2} (y_{j+1} - y_j) \stackrel{m}{=} (\overline{A_3 D_3} + \overline{B_3 C_3}) \cdot \frac{1}{q_r} \stackrel{m}{\leq} \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2},$$

donc

$$\overline{A_3 D_3} < \frac{\delta_{r-1}}{q_r}, \quad \overline{B_3 C_3} \leq \frac{\delta_{r-1}}{q_r}.$$

Lorsque les droites  $\overline{A_3 B_3}$ ,  $\overline{C_3 D_3}$  se coupent en un point

---

\* Voir Chap. IV No. 1.

$O_3$ , soient  $d_1$  et  $d_2$  les distances (positives) respectives de  $O_3$  à  $\overline{A_3 D_3}$  et à  $\overline{B_3 C_3}$ . Soit  $d_1 \geq d_2$ . On a  $d_1 \stackrel{m}{=} \frac{1}{q_r}$ .

Comme

$$c_{i,j} = \frac{\overline{A_3 D_3} \cdot d_1 + \overline{B_3 C_3} \cdot d_2}{2} \leq \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2},$$

on aura  $\overline{A_3 D_3} \leq \frac{\delta_{r-1}}{q_r}$ , et les triangles  $O_3 A_3 D_3$  et  $O_3 C_3 B_3$  étant semblables on déduit  $\overline{B_3 C_3} \leq \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2}$ .

Or

$$n_{i,j} \geq [\alpha_{i,j}^2 + b_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}} = [\alpha_{i,j}^2 + (\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \cdot (A_2 B_2 + C_2 D_2))^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$n_{i,j} \geq \left[ \alpha_{i,j}^2 + \left( \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) (2 \overline{A_2 B_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$n_{i,j} \geq \left[ \alpha_{i,j}^2 + ((x_{i+1} - x_i) \overline{A_2 B_2})^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

$$n_{i,j} > [\alpha_{i,j}^2 + ((x_{i+1} - x_i) \overline{A_2 B_2})^2]^{\frac{1}{2}} + (y_{j+1} - y_j) \overline{B_3 C_3} - \frac{1}{q_r} \cdot \frac{\delta_{r-1}}{q_r} - \frac{1}{q_r^2} \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

$$n_{i,j} \geq [\alpha_{i,j}^2 + ((x_{i+1} - x_i) \overline{A_2 B_2})^2 + (y_{j+1} - y_j) \overline{B_3 C_3}]^{\frac{1}{2}} - \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2}$$

$$n_{i,j} \geq 2 \overline{ABC} - \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2}$$

et de même

$$n_{i,j} \geq 2 \overline{ADC} - \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2},$$

on ne doit multiplier que  $\delta_{r-1}$  et on conclut, comme pour  $P$ , que

$$Q \stackrel{m}{\leq} \delta_{r-1}.$$

d) On a de même dans le quatrième groupe

$$R \stackrel{m}{\leq} \delta_{r-1}.$$

e) Dans le cinquième

$$S \stackrel{m}{\leq} \delta_{r-1}.$$

De a) b) c) d) e) on déduit

$$K + P + Q + R + S \stackrel{m}{\leq} \delta_{r-1}.$$

Donc pour  $\lim r = \infty$  on aura

$$X_{\infty} Y_{\infty} \lambda_{i,j} ((ABC) + (ADC) - n_{i,j}) = 0,$$

et comme

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \lambda_{i,j} |t_{i,j} - n_{i,j}| = 0,$$

on obtient enfin

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \lambda_{i,j} |t_{i,j} - (ABC + ADC)| = 0.$$

4. Soit  $B'$  l'intersection de la droite  $x = x_i$ ,  $y = y_{j+1}$  avec le plan du triangle  $ABD$ , on voit que  $B'$  est le sommet opposé à  $D$  pour le parallélogramme  $AB'CD$ .

On conclut, en s'appuyant sur a) b) c) d) e) du No. précédent, que

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \lambda_{i,j} (ABB' + BB'C) = 0.$$

On a, par exemple, pour le deuxième groupe

$$BB'C = \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) \overline{BB'} = \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) \overline{A_2 B_2} - D_2 C_2 \leq \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

En considérant le tétraèdre dont les sommets sont  $A, B, C, B'$ , on obtient:

$$|(ABC + ADC) - (AB'CD)| \leq ABB' + BB'C.$$

Donc

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \lambda_{i,j} |(ABC + ADC) - (AB'CD)| = 0,$$

et à l'aide de

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \lambda_{i,j} |t_{i,j} - (ABC + ADC)| = 0$$

on aura

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \lambda_{i,j} |t_{i,j} - (AB'CD)| = 0.$$

Désignons par  $\theta_{i,j+1}^x$  la valeur absolue de l'aire limitée par  $\widehat{BC}$ ,  $BB'$ ,  $B'C$ ; et par  $\theta_{i,j}^y$  la valeur absolue de l'aire limitée par  $\widehat{AB}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{B'A}$ , on aura

$$|\theta_{i,j+1}^x - \theta_{i,j+1}'^x| \leq BB'C, \quad |\theta_{i,j}^y - \theta_{i,j}'^y| \leq ABB'.$$

Nous aurons donc (voir le No. 3B) du Chap. VIII)

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \lambda_{i,j} (\theta_{i,j+1}^x + \theta_{i,j}'^y) = 0.$$

5. Revenons à notre surface caractérisée par la propriété relative à  $G$ .

On a

$$A_2 \overline{B_2} < (y_{j+1} - y_j) \cdot G, \quad D_2 C_2 < (y_{j+1} - y_j) \cdot G,$$

et  $X_{l_r} Y_{m_r}$  a un quotient fini.

On voit, à l'aide de ces remarques, qu'il existe une constante  $K$  positive, indépendante de  $r$ , telle que, lorsque

$$\overline{A_3 D_3} > K \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

$\overline{A_3 B_3}$  et  $D_3 C_3$  ne se coupent pas. On a  $K \stackrel{m}{=} 1$ . Divisons les rectangles pour lesquels  $\varepsilon_{i,j} = 1$  en deux classes, la première contiendra ceux où

$$\overline{A_3 D_3} \leq K \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

la seconde, le reste.

On a toujours

$$\begin{aligned} ABC + ADC &\leq (A_1 B_1 C_1 + A_1 D_1 C_1) + (A_2 B_2 C_2 + A_2 D_2 C_2) \\ &\quad + (A_3 B_3 C_3 + A_3 D_3 C_3). \end{aligned}$$

Donc pour la première classe

$$ABC + ADC \leq \frac{m}{q_r^2} + \frac{1}{q_r^2} + \frac{1}{q_r^2} \stackrel{m}{=} \frac{1}{q_r^2},$$

et aussi

$$n_{i,j} \stackrel{m}{=} \frac{1}{q_r^2},$$

ainsi pour la première classe

$$(ABC + ADC) - n_{i,j} \leq \frac{1}{q_r^2}.$$

Pour la deuxième classe  $A_3 B_3 C_3 D_3$  est un trapèze (ou un parallélogramme) et

$$ABC + ADC \leq \frac{m}{q_r^2} + \frac{1}{q_r^2} + c_{i,j} \leq \frac{m}{q_r^2} + n_{i,j},$$

mais on doit multiplier seulement  $\frac{1}{q_r^2}$ , donc pour les rectangles où  $\varepsilon_{i,j} = 1$

$$(ABC + ADC) - n_{i,j} \leq \frac{1}{q_r^2}.$$

C'est à dire que (voir No. 3 A du Chap. VIII).

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \varepsilon_{i,j} ((ABC + ADC) - n_{i,j}) = 0.$$

Nous avons encore

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} \lambda_{i,j} ((ABC + ADC) - n_{i,j}) = 0$$

et, à l'aide du Nr. 3 G, du Chap. VIII, on conclut que

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} |t_{i,j} - (ABC + ADC)| = 0$$

et à plus forte raison

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} (t_{i,j} - (ABC + ADC)) = 0.$$

C'est à dire que

$$X_{\infty} Y_{m\infty} (ABC + ADC) = X_{\infty} Y_{m\infty} t_{i,j} = t,$$

la quadrature de notre surface est achevée, on a pour l'aire

$$T_1 = T_6 = t.$$

Remarque. On a encore (voir Chap. VI),

$$X_{\infty} Y_{m\infty} n'_{i,j} = t,$$

$$X_{\infty} Y_{m\infty} (AB'CD) = t$$

(voir Introduction definition 4).

### Chapitre X.

#### Variation des aires des surfaces formant un système continu.

##### Cas où l'aire est donnée par une intégrale double.

1. Soit  $z = f(x, y, \mu)$  une fonction bornée et continue des variables  $x, y, \mu$ ,  $x$  et  $y$  variant respectivement dans  $(0, a)$  et  $(0, b)$  et  $\mu$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . En donnant à  $\mu$  une valeur constante,  $z = f(x, y, \mu)$  sera donc l'équation d'une surface, et toutes ces surfaces forment évidemment un système continu.

Nous supposons que pour chaque  $\mu$  il existe deux nombres  $\bar{S}(\mu)$  et  $G(\mu)$  finis et positifs, tels que les longueurs des sections  $x = \text{const.}$   $y = \text{const.}$  de  $z = f(x, y, \mu)$  soient plus petites que  $\bar{S}(\mu)$  et que, si  $y_1 - y \neq 0$

$$\left| \frac{f(x, y_1, \mu) - f(x, y, \mu)}{y_1 - y} \right| < G(\mu).$$

Quoique chaque  $\bar{S}(\mu)$  soit fini, il est possible que la limite supérieure de tous les  $\bar{S}(\mu)$  peut être infinie. De même pour les  $G(\mu)$ .

Soit  $T(\mu)$  l'aire ( $T_1 = T_6$ ) de la surface  $z = f(x, y, \mu)$ . Nous allons démontrer que  $T(\mu)$  est une fonction semicontinue.

Soient  $\tau_{i,j}(\mu)$ ,  $\beta_{i,j}(\mu)$ ,  $\gamma_{i,j}(\mu)$  les valeurs de  $\tau_{i,j}$ ,  $\beta_{i,j}$ ,  $\gamma_{i,j}$ , pour la surface  $z = f(x, y, \mu)$ . Prenons une division  $X_i Y_m$  telle que

$$T(\mu) - X_i Y_m \tau_{i,j}(\mu)$$

soit aussi petit que l'on veut.

Soit  $\mu_1$  assez voisin de  $\mu$ . On voit aisément, par des considérations géométriques, que les différences

$$|\beta_{i,j}(\mu) - \beta_{i,j}(\mu_1)|, \quad |\gamma_{i,j}(\mu) - \gamma_{i,j}(\mu_1)|$$

sont aussi petites que l'on veut.

Ainsi en considérant les expressions de  $\tau_{i,j}(\mu)$  et de  $\tau_{i,j}(\mu_1)$  (Chap. III), on conclut, à l'aide des inégalités du Chap. IV, que

$$|\tau_{i,j}(\mu) - \tau_{i,j}(\mu_1)|$$

est aussi petit que l'on veut.

C'est à dire que

$$|X_i Y_m \tau_{i,j}(\mu) - X_i Y_m \tau_{i,j}(\mu_1)|$$

est aussi petit que l'on veut.

Donc

$$|T(\mu) - X_i Y_m \tau_{i,j}(\mu_1)|$$

est aussi petit que l'on veut.

Mais

$$T(\mu_1) \geq X_i Y_m \tau_{i,j}(\mu_1),$$

ainsi la différence

$$T(\mu) - T(\mu_1),$$

qui est ou négative ou positive est dans ce dernier cas aussi petite que l'on veut.  $T(\mu)$  est une fonction uniforme de  $\mu$ ; elle sera donc semicontinue. (No. 1 Chap. III).\*

2. Soit  $z = \varphi(x, y)$  une fonction bornée, définie dans  $(0, a; 0, b)$ .

Soit  $G_{i,j}^{\varphi}$  et  $g_{i,j}^{\varphi}$  les limites supérieure et inférieure de ses valeurs pour les points de  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ .

Les quantités

$$X Y G_{i,j}^{\varphi} \cdot \alpha_{i,j}, \quad X Y g_{i,j}^{\varphi} \cdot \alpha_{i,j}$$

existent et elles sont finies. Si elles sont égales, nous dirons que  $\varphi$  est intégrable et nous donnerons à

$$X Y G_{i,j}^{\varphi} \cdot \alpha_{i,j}, \quad X Y g_{i,j}^{\varphi} \cdot \alpha_{i,j}$$

le nom d'intégrale double de  $\varphi$ . (Définition de RIEMANN.)

Son symbole est

$$\int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) dx dy.$$

Pour qu'elle existe il faut et il suffit que

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} (G_{i,j}^{\varphi} - g_{i,j}^{\varphi}) \cdot \alpha_{i,j}$$

---

\* Ce théorème a été démontré par M. LEBESGUE (la définition de l'aire étant  $T_2$ ) pour une famille continue d'ailleurs quelconque de surfaces. Thèse, p. 114.

soit égal à 0, pour une suite de divisions. — Et de plus, dans la détermination de  $G_{i,j}$  et  $g_{i,j}$ , on peut rejeter les valeurs de la fonction bornée  $\varphi$  pour les points du contour de  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ .

En désignant par  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$  les coordonnées d'un point quelconque de  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ , on aura

$$\int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) dx dy = XY \varphi(x_{i,j}, y_{i,j}) \cdot \alpha_{i,j}.$$

Soient  $\varphi(x, y)$  et  $\psi(x, y)$  deux fonctions intégrables, alors

$$[1 + (\varphi(x, y))^2 + (\psi(x, y))^2]^{\frac{1}{2}}$$

est aussi intégrable et on a

$$\begin{aligned} & XY \left(1 + (g_{i,j}^{\varphi})^2 + (g_{i,j}^{\psi})^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha_{i,j} \\ &= XY \left(1 + (G_{i,j}^{\varphi})^2 + (G_{i,j}^{\psi})^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha_{i,j} \\ &= \int_0^a \int_0^b [1 + (\varphi(x, y))^2 + (\psi(x, y))^2]^{\frac{1}{2}} dx dy, \end{aligned}$$

en remarquant qu'on peut négliger les valeurs de  $\varphi$  et  $\psi$  sur le contour de  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ .

3. Soit  $z = \varphi(x)$  une fonction bornée et continue,  $x$  variant dans  $(0, a)$ .

Soit  $x$  un point intérieur à  $(0, a)$ . Soit

$$u > 0 \text{ et } x - u \geq 0, \quad x + u \leq a.$$

Lorsque  $h$  varie, en prenant toutes les valeurs telles que

$$0 < h \leq u,$$

soit  $\frac{L(x, x+u)}{l(x, x+u)}$  la limite supérieure inférieure des valeurs de

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}.$$

Et soit de même  $\frac{L'(x-u, x)}{l'(x-u, x)}$  la limite supérieure inférieure des valeurs de

$$\frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h}.$$

Les limites de  $L(x, x+u)$ ,  $l(x, x+u)$ ,  $L'(x-u, x)$ ,  $l'(x-u, x)$  pour  $u=0$  sont déterminées\*; désignons les par

$$A(x), \lambda(x), A'(x), \lambda'(x).$$

On voit que les fonctions  $A(x)$  et  $\lambda(x)$  sont bien définies et uniformes pour chaque  $x \neq a$ , ainsi que les fonctions  $A'(x)$  et  $\lambda'(x)$  pour chaque  $x \neq 0$ .

Si nous prenons  $A(a) = A'(a)$ ,  $\lambda(a) = \lambda'(a)$ ,  $A(0) = A(0)$ ,  $\lambda(0) = \lambda(0)$ , les  $A(x)$ ,  $\lambda(x)$ ,  $A'(x)$ ,  $\lambda'(x)$  seront définies dans  $(0, a)$ .

Ces quantités sont ce que l'on appelle les quatre dérivées de  $\varphi$  pour le point  $x$  considérée. Ils ont été définis et étudiés par P. DU BOIS REYMOND et DINI.

Nous allons énoncer quelques propriétés de ces dérivées:

a) Lorsque  $h > 0$  est assez petit, la valeur de

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

est comprise entre  $A(x) + \varepsilon$  et  $\lambda(x) - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , et est aussi petite que l'on veut.

b) Les quatre dérivées ont la même limite supérieure dans chaque intervalle  $(v, w)$  de  $(0, a)$ . Il en est de même pour la limite inférieure\*\*.

Si  $x' \neq x''$  et si  $x', x''$  sont points de  $(v, w)$  la limite supérieure des valeurs de

$$\frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'}$$

est égale à la limite supérieure des quatre dérivées dans  $(v, w)$ . Il en est de même pour la limite inférieure.

c) Là, où l'une des quatre dérivées est continue pour une point  $x$ , les trois autres le sont aussi, et leurs valeurs sont égales\*\*\*.

En ce cas,  $\varphi$  y est différentiable et le quotient différentiel, dérivée dans le sens ordinaire, est la valeur commune des quatre dérivées.

4. Pour  $y = \text{const.}$ ,  $z = f(x, y)$  est une fonction de  $x$ . On

\* Par exemple  $L(x, x+u)$  ne croît pas lorsque  $u$  décroît.

\*\* Ayant comme toujours  $v < w$ , on doit prendre  $A(w) = A'(w)$ ,  $\lambda(w) = \lambda'(w)$ ,  $A(v) = A(v)$ ,  $\lambda'(v) = \lambda(v)$ .

\*\*\* Le théorème est vrai même lorsque la valeur de la dérivée est  $+\infty$  ou  $-\infty$ , mais on doit alors élargir la définition de la continuité.

peut former ses quatre dérivées. Désignons les par  $A_x(x, y)$ ,  $\lambda_x(x, y)$ ,  $A'_x(x, y)$ ,  $\lambda'_x(x, y)$ . Quand  $y$  varie, elles sont donc des fonctions uniformes sur  $(0, a; 0, b)$ .

De même pour  $x = \text{const.}$   $z = f(x, y)$  est une fonction de  $y$ . On peut former quatre dérivées pour la variable  $y$ , en faisant varier  $x$ ; elles sont des fonctions bien définies et uniformes sur  $(0, a; 0, b)$ . Désignons les par  $A_y(x, y)$ ,  $\lambda_y(x, y)$ ,  $A'_y(x, y)$ ,  $\lambda'_y(x, y)$ . On démontre très simplement que les quatre dérivées par rapport à  $x$  ont les mêmes limites supérieure et inférieure, dans chaque rectangle  $(x', x''; y', y'')$  de  $(0, a; 0, b)$ . Il en est de même pour les quatre dérivées par rapport à  $y^*$ .

5. Supposons que, pour la surface  $z = f(x, y)$ , il existe un nombre  $G$  fini et positif, tel que, si

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 \neq 0, \\ \left| \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y)}{[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| < G.$$

Pour cette surface, les dérivées sont toutes comprises entre  $+G$  et  $-G$ .

On démontre aisément, à l'aide des N<sup>ros</sup> 4 et 2, que lorsque l'une des dérivées relatives à  $x$  est deux fois intégrable, les trois autres le sont aussi, et que les quatre intégrales doubles sont égales. Il en est de même pour les dérivées relatives à  $y$ .

Désignons respectivement par  $\lambda_x$  et par  $\lambda_y$  l'une des dérivées par rapport à  $x$  et l'une des dérivées par rapport à  $y$ .

Lorsque  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  sont intégrables

$$(1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}}$$

l'est aussi et les 16 fonctions —  $\lambda_x$  désigne quatre fonctions  $\lambda_y$  aussi — ont la même intégrale.

6. Théorème. Dans ce cas on a

$$t = \int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy$$

\* Mais sur le contour de  $(x', x''; y', y'')$  on doit changer les valeurs des dérivées. Par exemple sur la ligne  $x = x''$  on doit prendre

$$A_x(x'', y) = A'_x(x'', y), \text{ etc.}$$

et,  $X_{l_r} Y_{m_r}$  étant une suite arbitraire de divisions de première espèce ou non, on aura

$$t = X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (ABC + ADC) = X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (AB'CD),$$

c'est à dire que

$$t = XY(ABC + ADC) = XY(AB'CD) = T_6 = T_1.$$

Démonstration. Pour la suite de divisions du Chap. IX on a

$$t = X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (ABC + ADC).$$

Mais on a

$$ABC = \left[ 1 + \left( \frac{A_2 B_2}{y_{j+1} - y_j} \right)^2 + \left( \frac{\overline{B_3 C_3}}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha_{i,j}}{2}$$

et

$$g_{i,j}^{\lambda_y} \leq \frac{A_2 B_2}{y_{j+1} - y_j} \leq G_{i,j}^{\lambda_y}, \quad g_{i,j}^{\lambda_x} \leq \frac{\overline{B_3 C_3}}{x_{i+1} - x_i} \leq G_{i,j}^{\lambda_x}.$$

Donc

$$\left[ 1 + \left( g_{i,j}^{\lambda_y} \right)^2 + \left( g_{i,j}^{\lambda_x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha_{i,j}}{2} \leq ABC < \left[ 1 + \left( G_{i,j}^{\lambda_y} \right)^2 + \left( G_{i,j}^{\lambda_x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha_{i,j}}{2}$$

et  $ADC$  est aussi compris entre les mêmes limites.

Ainsi

$$\begin{aligned} X_{l_r} Y_{m_r} \left[ 1 + \left( g_{i,j}^{\lambda_y} \right)^2 + \left( g_{i,j}^{\lambda_x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha_{i,j} &< X_{l_r} Y_{m_r} (ABC + ADC) \\ &\leq X_{l_r} Y_{m_r} \left[ 1 + \left( G_{i,j}^{\lambda_y} \right)^2 + \left( G_{i,j}^{\lambda_x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha_{i,j} \end{aligned} \quad (A)$$

et on peut remplacer le terme au milieu par

$$X_{l_r} Y_{m_r} (ADC + ADC) = X_{l_r} Y_{m_r} (AB'CD).$$

Pour  $r = \infty$  les deux termes extrêmes sont égaux à

$$\int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy,$$

et ainsi

$$t = \int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

Soit maintenant  $X_{l_r} Y_{m_r}$  une suite quelconque de divisions de première espèce ou non. L'inégalité (A) subsiste, et les limites des deux termes extrêmes étant égaux à l'intégrale, et ainsi à  $t$ , on aura

$$t = XY(ABC + ADC) = XY(AB'CD) = T_6 = T_1,$$

Lorsque  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$  existent et sont deux fois intégrables, on obtient la formule connue

$$\int_0^a \int_0^b (1 + q^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} dx dy = T_6 = T_1 = t,$$

et comme précédemment

$$t = XY(ABC + ADC) = XY(AB'CD) = T_6 = T_1.$$

Nous allons maintenant traiter le cas le plus général, où l'aire est donnée par une intégrale double.

Nous énoncerons dans les N<sup>ros</sup> 7—13 quelques théorèmes préliminaires.

7. Soient  $\psi(x)$  et  $\varphi(x)$  deux fonctions quelconques de  $x$  dans  $(0, a)$ , on sait qu'on a en général

$$\int_0^a \psi(x) dx + \int_0^a \varphi(x) dx \leq \int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)] dx.$$

Mais, lorsque  $\psi(x)$  et  $\varphi(x)$  sont des fonctions semicontinues bornées inférieurement, on a

$$\int_0^a \psi(x) dx + \int_0^a \varphi(x) dx = \int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)] dx.$$

Il est évident qu'on ne doit faire la démonstration que lorsque les deux intégrales par défaut du premier membre ont chacune une valeur finie — dans le cas contraire on aurait  $+\infty = +\infty$ .

Dans ce cas ces fonctions sont sommables, d'après les idées de M. LEBESGUE; nous désignerons l'intégrale de  $\psi(x)$  au sens de M. LEBESGUE par

$$(L) \int_0^a \psi(x) dx.$$

On a, en général,  $\psi(x)$  et  $\varphi(x)$  étant des fonctions sommables:

$$(L) \int_0^a \psi(x) dx + (L) \int_0^a \varphi(x) dx = (L) \int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)] dx.$$

Mais lorsque  $\psi$  est semicontinue on a

$$\int_0^a \psi(x) dx = (L) \int_0^a \psi(x) dx.$$

Donc ( $\varphi$  étant aussi semicontinue)

$$\begin{aligned} \int_0^a \psi(x) dx + \int_0^a \varphi(x) dx &= (L) \int_0^a \psi(x) dx + (L) \int_0^a \varphi(x) dx = \\ &= (L) \int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)] dx. \end{aligned}$$

Mais on sait que  $\psi$  et  $\varphi$  étant semicontinues  $\psi + \varphi$  l'est aussi, ainsi

$$(L) \int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)] dx = \int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)] dx$$

et enfin

$$\int_0^a \psi(x) dx + \int_0^a \varphi(x) dx = \int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)] dx^*.$$

**Théorème.** Soit  $Q$  un ensemble de points situés sur  $(0, a)$ . Supposons qu'on puisse le renfermer à l'intérieur\*\* de certains intervalles, dont la longueur pourra être rendue aussi petite que l'on veut, et dont le nombre, fini ou non, sera dans le dernier cas égal à la première puissance.

Nous supposons de plus que la somme des longueurs de ces intervalles soit plus grande qu'une constante  $d \geq 0$  ( $d < a$ ), mais que par le choix convenable des intervalles, elle puisse être rendue plus petite que  $d + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , d'ailleurs arbitraire.

Adjoignons à chaque point  $x$  de  $(0, a)$  qui n'appartient pas à  $Q$ , un intervalle  $(u, v)$  qui le renferme\*\*. Lorsque  $u < u_1 < x < v_1 \leq v$  nous allons considérer  $(u_1, v_1)$  aussi comme adjoint à  $x$ .

Nous désignerons ces intervalles par I.

Soit  $\lambda$  un nombre positif donné à l'avance.

Alors il existe une division  $X_\lambda$  de  $(0, a)$ , pour laquelle les

\* Autrefois j'ai démontré ce théorème par une méthode qui semble plus longue que celle du texte, mais ne l'est pas en réalité, puisque elle ne suppose pas la connaissance de l'intégrale de M. LEBESGUE. Mais comme les belles recherches de M. LEBESGUE sont aujourd'hui suffisamment connues nous nous contentons d'indiquer un lemme qui rend aussi des grands services dans la quadrature de  $z = f(x, y)$ .

\*\* Les points 0 et  $a$  exceptés, ils ne peuvent être que l'extrémité d'un tel intervalle.

longueurs des intervalles sont plus petites que  $\lambda$ , de plus, la somme des longueurs des intervalles de  $X_i$  qui ne sont pas des intervalles I, est plus petite que  $d + \lambda$ .

Dans les applications nous avons eu  $d = 0^*$ .

8. Énonçons un autre théorème.

Désignons par  $(0, c)$  un intervalle de la variable  $z$ , par  $Z_n$  une division de  $(0, c)$ , par  $(z_h, z_{h+1})$  l'intervalle général de  $Z_n$ , etc. ....

Soit  $\bar{Z}$  un ensemble de seconde catégorie\*\* de  $(0, c)$ . Soit  $\psi_r(\bar{Z})$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) une fonction uniforme bornée et positive, définie sur l'ensemble  $\bar{Z}$ ; soit de plus  $\psi_r$  intégrable et

$$\psi_{r+1}(\bar{Z}) \geq \psi_r(\bar{Z})^{***}.$$

Ainsi pour chaque point  $\bar{Z}$  de  $\bar{Z}$

$$\lim_{r=\infty} \psi_r(\bar{Z})$$

est bien déterminée. En désignant cette valeur par  $\Psi(\bar{Z})$ ,  $\Psi(\bar{Z})$  sera une fonction uniforme et positive sur  $\bar{Z}$ . Supposons que  $\Psi$  soit une fonction semicontinue†. Alors on aura

\* Le théorème est une généralisation formelle d'un théorème de M. LEBESGUE. Je crois que M. LEBESGUE l'emploie implicitement dans ses Leçons sur l'intégration, p. 62.

\*\* C'est à dire que l'ensemble  $(0, c) - \bar{Z}$  peut être renfermé, dans des intervalles, pour lesquels la somme de leurs longueurs est aussi petit que l'on veut. Cette définition est due à M. BAIER.

\*\*\* Bien entendu, quoique chaque  $\psi_r$  soit bornée individuellement, la limite supérieure de  $\psi_r$  peut augmenter indéfiniment avec  $r$ . — Désignons par  $G_h(g_h)$  la limite supérieure (inférieure) de  $\psi_r(\bar{Z})$  pour les points de  $\bar{Z}$  contenus dans  $(z_h, z_{h+1})$ . Nous dirons que  $\psi_r(\bar{Z})$  est intégrable, lorsque l'on a

$$ZG_h(z_{h+1} - z_h) = Zg_h(z_{h+1} - z_h),$$

et nous désignerons cette valeur par

$$\int_0^c \psi_r(\bar{Z}) dz.$$

† C'est à dire que pour chaque point  $\bar{Z}$  de  $\bar{Z}$  on doit avoir

$$\Psi(\bar{Z}) = \lim_{\varepsilon + \eta = 0} g^{\Psi}(\bar{Z}' - \varepsilon, \bar{Z}' + \eta),$$

en désignant par  $g^{\Psi}(\bar{Z}' - \varepsilon, \bar{Z}' + \eta)$  la limite inférieure des valeurs de  $\Psi$  pour les points de  $\bar{Z}$  contenus dans  $(\bar{Z}' - \varepsilon, \bar{Z}' + \eta)$ .

$$\int_0^c \Psi(\bar{Z}) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \psi_r(\bar{Z}) dz^*.$$

9. Revenons au théorème du No. 7. Désignons par  $\xi_i$  une valeur qui, comprise dans  $(x_i, x_{i+1})$ , soit telle que, pour une certaine suite de divisions  $X_{l_r}$ , nous ayons:

$$X_{l_\infty}[\psi(\xi_i) + \varphi(\xi_i)](x_{i+1} - x_i) = \int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)] dx^{**}.$$

Alors on aura

$$X_{l_\infty} \psi(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_0^a \psi(x) dx,$$

$$X_{l_\infty} \varphi(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_0^a \varphi(x) dx.$$

Nous supprimons la démonstration qui est de toute évidente.

Remarquons que le théorème s'étend aussi à la somme de plusieurs fonctions semicontinues, bornées inférieurement, dont l'intégrale par défaut a une valeur finie.

10. Soit  $\psi(x) \geq 0$  et semicontinue, et soit de plus

$$\psi(0) < +\infty, \quad \psi(a) < +\infty, \quad \int_0^a \psi(x) dx < +\infty.$$

Ayant  $\int_0^a \psi(x) dx < +\infty$ , il existe nécessairement dans chaque intervalle partiel de  $(0, a)$  des points  $x$  pour lesquels  $\psi(x) < +\infty$ .

On doit remarquer que  $\Psi(\bar{Z})$  n'a pas nécessairement des minima, comme la fonction semicontinue définie pour tous les points de  $(0, a)$ , (ou pour les points d'un ensemble relativement parfait).  $\Psi(\bar{Z})$  est certainement semicontinue lorsque chaque  $\psi_r(\bar{Z})$  est continu sur l'ensemble  $Z$ .

$$* \quad \int_0^c \Psi(\bar{Z}) dz = Z g^{W(z_h, z_{h+1})} \cdot (z_{h+1} - z_h).$$

Si l'ensemble  $Z$  coïnciderait avec  $(0, c)$  le théorème serait une conséquence de la condition 6. de M. LÉBESGUE. Leçons sur l'intégration p. 99. Cette remarque conduit à la démonstration.

\*\* Par exemple on peut choisir  $\xi_i$  de telle manière qu'on ait

$$\psi(\xi_i) + \varphi(\xi_i) = g^{(\psi + \varphi)}(x_i, x_{i+1}).$$

On peut donc former une division  $X_l$ , telle que l'on ait, pour ses points diviseurs,  $\psi(x) < +\infty$ .

Soit  $X_{L_r}$  une suite de divisions à quotient fini. Choisissons dans chaque intervalle de  $X_{L_r}$ , ne contenant aucun point de  $X_l$ , un point  $\xi_i$ , tel que nous ayons

$$\psi(\xi_i) = g^\psi(x_i, x_{i+1}).$$

Les points  $\xi_i$  et les points de  $X_l$  forment une division  $X_{l_r}$ .

Dès que  $r$  dépassera une certaine limite, nous aurons

$$X_{l_r}(\psi(x_i) + \psi(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) < 2H \int_0^a \psi(x) dx,$$

$H$  étant une constante qui ne dépend que du quotient de la suite  $X_{L_r}$ .

De plus, lorsque  $\psi(x)$  est égal à la somme de plusieurs fonctions positives et semicontinues,

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \dots + \psi_h(x) + \dots + \psi_n(x)$$

nous aurons, dès que  $r$  dépassera une certaine limite:

$$X_{l_r}(\psi_h(x_i) + \psi_h(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) < 2H \int_0^a \psi_h(x) dx.$$

De plus  $(x', x'')$  étant un intervalle quelconque de  $(0, a)$  on a:

$${}^x X_{l_r}^{x'''}(\psi_h(x_i) + \psi_h(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) < 2H \int_{x'}^{x''} \psi_h(x) dx.$$

11. Nous allons démontrer maintenant que

$$XY\beta_{i,j}$$

existe et que l'on a

$$XY\beta_{i,j} = \int_0^a J(x) dx. \quad (\text{No. 2. Chap. V}).$$

Soit  $X_{l_r} Y_{m_r}$  une suite de divisions. Posons

$$\bar{m}_r(x) = Y_{m_r} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|,$$

$\bar{m}_r(x)$  est évidemment une fonction uniforme, bornée et continue de  $x$ , et on a

$$J(x) \geq \bar{m}_{r+1}(x) \geq \bar{m}_r(x), \quad J(x) = \lim_{r=\infty} \bar{m}_r(x),$$

$$X_{l_r} Y_{m_r} \beta_{i,j} = \int_0^a \bar{m}_r(x) dx.$$

$J(x)$  est semicontinue et ainsi, d'après le théorème du No. 8

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^a \bar{m}_r(x) dx = \int_0^a J(x) dx.$$

De plus

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^a \bar{m}_r(x) dx = X_{\infty} Y_{m_{\infty}} \beta_{i,j}.$$

On conclut

$$X_{\infty} Y_{m_{\infty}} \beta_{i,j} = \int_0^a y(x) dx.$$

En considérant que

$$\int_0^a |f(x, y'') - f(x, y')| dx,$$

par suite de la continuité de la surface, tend vers 0 avec  $|y'' - y'|$ , on démontre, à l'aide de la superposition des divisions, que  $Y_{r'} Y_{m'}$  étant une suite quelconque de divisions (de première espèce ou non), les valeurs limites de la suite des valeurs

$$X_{r'} Y_{m'} \beta_{i,j}$$

coïncident avec  $X_{\infty} Y_{m_{\infty}} \beta_{i,j}$ .

Donc  $XY\beta_{i,j}$  existe et est égal à  $\int_0^a J(x) dx$ .

On démontre de même que

$$XY\gamma_{i,j} = \int_0^b J(y) dy.$$

Soit  $Q$  un ensemble des points situés dans  $(0, a; 0, b)$ . Prenons  $\varepsilon_{i,j} = 1$  lorsque  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$  contient au moins un point de  $Q$ , et soit  $\varepsilon_{i,j} = 0$  dans le cas contraire.

On démontre aisément que, lorsque l'aire de  $f$  est finie,

$$XY\varepsilon_{i,j} \cdot \beta_{i,j}$$

existe. Soit de plus  $\bar{\beta}_{i,j}$  la valeur qui est pour  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$  ce que  $XY\beta_{i,j}$  est pour  $(0, a; 0, b)$ . On aura

$$XY\varepsilon_{i,j} \cdot \beta_{i,j} = XY\varepsilon_{i,j} \cdot \bar{\beta}_{i,j}.$$

Soit  $\beta_Q$  cette valeur, désignons par  $\bar{\gamma}_{i,j}$ ,  $\gamma_Q$  des valeurs rela-

tives au plan  $yz$ , et respectivement analogues à  $\bar{\beta}_{i,j}$ ,  $\beta_Q$ , et soit

$$\alpha_Q = XY_{\varepsilon_{i,j}} \cdot \alpha_{i,j};$$

$\alpha_Q$  est évidemment la mesure extérieure de  $Q$ .\*

12. Soit  $z = \varphi(x, y)$  une fonction uniforme dans  $(0, a; 0, b)$  et soit  $x, y$  un point de  $(0, a; 0, b)$ . Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2$  positifs et soit  $G(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2; y - \eta_1, y + \eta_2)$  la limite supérieure des valeurs de  $\varphi$ , pour les points de  $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2; y - \eta_1, y + \eta_2)$ , contenus dans  $(0, a; 0, b)$ .

On sait que la limite de cette quantité pour  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0$  existe, et qu'elle est indépendante du mode de décroissance des  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2$ . Soit  $G(x, y)$  cette limite; désignons par  $g(x, y)$  la valeur analogue obtenue à l'aide des limites inférieures.

On sait que l'ensemble des points où  $G(x, y) = +\infty$  est relativement parfait et qu'il en est de même de l'ensemble des points pour lesquels  $g(x, y) = -\infty$ . L'ensemble somme est aussi relativement parfait. Désignons le par  $Q$ .

Supposons que  $\alpha_Q = 0$  et que, lorsque  $\varepsilon_{i,j} = 0$ ,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi(x, y) dx dy$$

existe — c'est à dire que lorsque  $\varepsilon_{i,j} = 0$ ,  $\varphi$  soit bornée et intégrable dans  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ .

Posons  $\lambda_{i,j} + \varepsilon_{i,j} = 1$  et, quelque soit le signe  $\omega$ , posons  $0 \cdot \omega = 0$ .

Pour une suite  $X_{i_r} Y_{m_r}$ ,

$$X_{i_\infty} Y_{m_\infty} \lambda_{i,j} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} |\varphi(x, y)| dx dy$$

existe, et l'on démontre de plus que

\* En désignant par  $Q_1$  l'ensemble dérivé d'ordre quelconque (fini ou transfini) de  $Q$  ou aura

$$\alpha_{Q_1} = \alpha_Q, \quad \beta_{Q_1} = \beta_Q, \quad \gamma_{Q_1} = \gamma_Q.$$

Pour les ensembles de points situés sur une surface  $z = f(x, y)$  à aire finie, on peut établir le théorème des mesures à l'aide des  $\alpha_{i,j}, \bar{\beta}_{i,j}, \bar{\gamma}_{i,j}, t_{i,j}$ .

$$XY\lambda_{i,j} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi(x, y) dx dy$$

existe aussi.

Lorsque cette valeur a une valeur finie, la quantité

$$XY\lambda_{i,j} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi(x, y) dx dy$$

existe aussi et a une valeur finie.

Nous dirons dans ce cas que  $\varphi(x, y)$  est intégrable et que la valeur ci-dessus est son intégrale; nous poserons

$$\int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) dx dy = XY\lambda_{i,j} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi(x, y) dx dy.*$$

13. Soient  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  intégrables; alors

$$(1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}}$$

est aussi intégrable et l'on a, comme dans le No. 5, seize fonctions ayant la même intégrale.

Nous poserons

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy = J_{i,j}$$

et nous désignerons aussi par  $Q$  l'ensemble relativement parfait des points pour lesquels  $(1 + \lambda_x^2 + \lambda_y^2)^{\frac{1}{2}}$  se comporte comme  $\varphi(x, y)$  pour  $Q$ .

14) Soient  $\lambda_y$  et  $\lambda_x$  intégrables, et soit de plus

$$X_{p_\infty} Y_{q_\infty} \varepsilon_{i,j} \cdot \beta_{i,j} = X_{p_\infty} Y_{q_\infty} \varepsilon_{i,j} \cdot \gamma_{i,j} = 0,$$

$X_{p_r} Y_{q_r}$  étant une suite déterminée de divisions de première espèce ou non.

On aura les théorèmes suivants.

I. 
$$t = \int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

\* C'est un cas particulier des intégrales généralisées de M. Jordan  
Cours d'Analyse, (2) 1894, T. II. p. 46 et suiv.

II. Lorsque le contour de la surface a une longueur finie, on peut trouver une suite de divisions  $X_{l_r} Y_{m_r}$ , telle que l'on ait

$$t = X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (ABC + ADC) = T_6 = T_1.$$

III. Dans le cas contraire on a de même

$$t = X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (ABC + ADC) = T_6 = T_1$$

mais on doit (de la somme et de la figure) rejeter les triangles qui ont un côté au-dessus du contour de  $(0, a; 0, b)$ . Il convient de remarquer qu'on ne les doit pas tous rejeter, par exemple lorsque  $S_y(0, b) < +\infty$ , on peut conserver ceux qui ont un côté dans le plan  $yz$ ; même lorsque  $S_y(0, b) = +\infty$  on peut conserver quelques-uns de ces derniers.

Démonstrations. A) Nous allons démontrer, que lorsque les conditions de ce No. sont remplies, on a

$$\int_0^a J(x) dx < +\infty, \quad \int_0^b J(y) dy < +\infty.$$

Considérons la suite  $X_{p_r} Y_{q_r}$ . Pour les rectangles de la division  $X_{p_r} Y_{q_r}$ , où  $\lambda_{i,j} = 1$ , la surface a la même propriété que la surface du No. 6.

Il en résulte que pour notre surface

$$t_{i,j} = J_{i,j} \quad (\lambda_{i,j} = 1).$$

Mais

$$t_{i,j} > \beta_{i,j}.$$

Or

$$J_{i,j} > \beta_{i,j} \quad (\lambda_{i,j} = 1),$$

$$X_{p_r} Y_{q_r} \lambda_{i,j} \cdot J_{i,j} > X_{p_r} Y_{q_r} \lambda_{i,j} \cdot \beta_{i,j},$$

$$X_{p_r} Y_{q_r} \lambda_{i,j} \cdot J_{i,j} + X_{p_r} Y_{q_r} \varepsilon_{i,j} \cdot \beta_{i,j} > X_{p_r} Y_{q_r} \beta_{i,j}.$$

Pour  $r = \infty$  on aura

$$\int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy > \int_0^a J(x) dx,$$

le théorème est donc démontré.

On aura de plus

$$\beta_Q = \gamma_Q = 0.$$

B) Dans ce qui suit nous supposons que la longueur du contour de  $f$  soit finie.

On peut donc former une division  $X_i Y_m$ , nous désignerons ses points par  $x'_i, y'_j$ , de façon que

$$J(x'_i) < +\infty, \quad J(y'_j) < +\infty.$$

et que  $\delta$  étant un nombre positif donné à l'avance, on ait:

$$0 < \int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy - X_i Y_m \lambda_{i,j} \cdot J_{i,j} < \delta \quad (1)$$

$$X_i Y_m \varepsilon_{i,j} (\alpha_{i,j} + \bar{\beta}_{i,j} + \bar{\gamma}_{i,j}) < \delta. * \quad (2)$$

Soit  $X_{L_r} Y_{M_r}$  une suite de divisions à quotient fini; prenons  $r$  assez grand pour que les  $(x'_i, x'_{i+1}) (y'_j, y'_{j+1})$  soient respectivement partagés en plusieurs autres intervalles, par les points de  $X_{L_r}$  et par les points de  $Y_{M_r}$ .

Dans chaque intervalle de  $X_{L_r}$  qui ne contient aucun point de  $X_i$ , nous choisirons un point  $\xi$ , tel que  $J(\xi)$  soit égal au minimum de  $J(x)$  dans l'intervalle considéré.

Les  $\xi$  et les points de  $X_i$  forment une division  $X_{l_r}$ .

Nous déterminerons de même une division  $Y_{m_r}$ . On observe que  $X_{l_r} Y_{m_r}$  contient  $X_i Y_m$ .

C) Soit, pour un rectangle  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$  de  $X_{l_r} Y_{m_r}$ ,  $\lambda'_{i,j} = \frac{1}{0}$ , lorsque ce rectangle est compris dans un rectangle de  $X_i Y_m$  pour lequel on avait  $\lambda_{i,j} = \frac{1}{0}$ .

Au-dessus des rectangles de  $X_i Y_m$ , où  $\lambda_{i,j} = 1$ , la surface a la même propriété que celle du Nr. 6.

Or, en prenant  $r$  assez grand, nous aurons

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda'_{i,j} \cdot J_{i,j} - X_{l_r} Y_{m_r} \lambda'_{i,j} (ABC + ADC) < \delta. \quad (3)$$

Considérons maintenant les rectangles de  $X_i Y_m$  où  $\varepsilon_{i,j} = 1$ , ( $\lambda_{i,j} = 0$ ). Le rectangle  $(x'_i, x'_{i+1}; y'_j, y'_{j+1})$  est partagé par les lignes de  $X_{l_r} Y_{m_r}$ .

Soient

$$x'_i = \xi_0^{(i)} < \xi_1^{(i)} < \dots < \xi_h^{(i)} < \dots < \xi_{r_i}^{(i)} = x'_{i+1},$$

$$y'_j = \eta_0^{(j)} < \eta_1^{(j)} < \dots < \eta_k^{(j)} < \dots < \eta_{r_j}^{(j)} = y'_{j+1},$$

---

\* Dans ce qui suit les  $\alpha_{i,j}, \bar{\beta}_{i,j}, \bar{\gamma}_{i,j}$  appartiendront à  $(x'_i, x'_{i+1}; y'_j, y'_{j+1})$ .

les points de  $X_{l_r}$  et de  $Y_{m_r}$  qui partagent respectivement  $(x'_i, x'_{i+1})$ ,  $(y'_j, y'_{j+1})$ .

On a

$$ABC + ADC \leq (A_1 B_1 C_1 + A_1 D_1 C_1) + (A_2 B_2 C_2 + A_2 D_2 C_2) \\ + (A_3 B_3 C_3 + A_3 D_3 C_3),$$

$$A_2 B_2 C_2 = \frac{1}{2} |f(\xi_h^{(i)}, \eta_{k+1}^{(j)}) - f(\xi_h^{(i)}, \eta_k^{(j)})| \cdot (\xi_{h+1}^{(i)} - \xi_h^{(i)}),$$

$$A_2 D_2 C_2 = \frac{1}{2} |f(\xi_{h+1}^{(i)}, \eta_{k+1}^{(j)}) - f(\xi_{h+1}^{(i)}, \eta_k^{(j)})| \cdot (\xi_{h+1}^{(i)} - \xi_h^{(i)}),$$

$$\sum_0^{r_j-1} |f(\xi_h^{(i)}, \eta_{k+1}^{(j)}) - f(\xi_h^{(i)}, \eta_k^{(j)})| \leq J_y(\xi_h^{(i)}, y'_{j+1}) - J_y(\xi_h^{(i)}, y'_j),$$

$$\sum_0^{r_i-1} |f(\xi_{h+1}^{(i)}, \eta_{k+1}^{(j)}) - f(\xi_{h+1}^{(i)}, \eta_k^{(j)})| < J_y(\xi_{h+1}^{(i)}, y'_{j+1}) - J_y(\xi_{h+1}^{(i)}, y'_j)$$

et ainsi

$$\sum_0^{r_i-1} \sum_0^{r_j-1} (A_2 B_2 C_2 + A_2 D_2 C_2) \\ \leq \frac{1}{2} \sum_0^{r_i-1} [J_y(\xi_h^{(i)}, y'_{j+1}) - J_y(\xi_h^{(i)}, y'_j) + J_y(\xi_{h+1}^{(i)}, y'_{j+1}) \\ - J_y(\xi_{h+1}^{(i)}, y'_j)] (\xi_{h+1}^{(i)} - \xi_h^{(i)}).$$

La fonction semicontinue  $J(x)$  est égale à la somme de  $m$  fonctions

$$J_y(x, y'_{j+1}) - J_y(x, y'_j),$$

et ces fonctions sont aussi semicontinues. La suite  $X_{L_r} Y_{M_r}$  a un quotient fini. Donc, d'après le No. 10, il existe une constante  $H$ , ne dépendant que du quotient de la suite et telle que, pour les  $r$  assez grands, le second membre de la dernière inégalité soit plus petit que

$$H \cdot \int_{x'_i}^{x'_{i+1}} (J_y(x, y'_{j+1}) - J_y(x, y'_j)) dx = H \cdot \bar{\beta}_{i,j}^*$$

---

\* D'après le théorème du No. 7 du Chap. VII on pourrait avoir, pour certaines suites,  $H < 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  étant d'ailleurs arbitraire.

Donc

$$\sum_0^{r_i-1} \sum_0^{r_j-1} [A_2 B_2 C_2 + A_2 D_2 C_2] \leq H \cdot \bar{\beta}_{i,j}$$

et de même en prenant, si cela est nécessaire,  $r$  encore plus grand,

$$\sum_0^{r_i-1} \sum_0^{r_j-1} [A_3 B_3 C_3 + A_3 D_3 C_3] < H \cdot \bar{\gamma}_{i,j}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_0^{r_i-1} \sum_0^{r_j-1} [ABC + ADC] &\leq \alpha_{i,j} + H \cdot \bar{\beta}_{i,j} + \bar{H} \cdot \gamma_{i,j} \\ &< H(\alpha_{i,j} + \bar{\beta}_{i,j} + \bar{\gamma}_{i,j}), \end{aligned}$$

car on peut supposer  $H > 1$ .

Nous aurons, à l'aide de (1) (2) (3)

$$\left| \int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy - X_{i_r} Y_{m_r} (ABC + ADC) \right| < 2\delta + H \cdot \delta. \quad (4)$$

D) On voit donc que si, au lieu de  $X_{i_r} Y_{m_r}$ , on prend le  $X_{i_r} Y_{m_r}$  de (4),  $r$  étant aussi grand, on peut, au lieu de  $\delta$  dans (1) (2) (3), prendre  $\frac{\delta}{2}$  et en continuant le procédé de proche en proche, on aura pour une certaine suite de divisions que nous désignons par  $X_{i_r} Y_{m_r}$ :

$$X_{i_\infty} Y_{m_\infty} (ABC + ADC) = \int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy^*.$$

E) Il reste à démontrer que

$$t = \int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy = T_6 = T_1.$$

$T_1$  ne peut être plus petit que l'intégrale. Soit  $X_{i_r} Y_{m_r}$  une suite de divisions, et soit  $\mathcal{A}_s$  une suite de polyèdres, telle que celles du Chap. I. En prenant  $s$  assez grand, pour les rectangles d'une division de la suite nous aurons, d'après le Chap. VI et d'après le No. 6 de ce Chap.:

$$\mathcal{A}_s^{i,j} \geq J_{i,j} - \delta_{i,j}, \quad (\lambda_{i,j} = 1), \quad \delta_{i,j} \geq 0,$$

\* On a encore  $X_{i_\infty} Y_{m_\infty} (ABC + ADC) = X_{i_\infty} Y_{m_\infty} (AB'CD)$ .

et la somme de tous les  $\delta_{i,j}$  est aussi petite que l'on veut. Ainsi

$$\mathcal{A}_s t \geq X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot J_{i,j} - \delta$$

— ici  $\delta$  est aussi petit que l'on veut.

Donc pour  $s = \infty$ ,  $r = \infty$ ,  $\delta = 0$ ,

$$\lim \mathcal{A}_s t \geq \int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

Nous omettons les démonstrations faciles à trouver des théorèmes I et III.

## Chapitre XI.

### La définition de M. Peano.

1. Soit donnée une surface courbe et soit  $T_4$  son aire. Décomposons-la en portions (1), (2), ..., en nombre fini.

Nous supposons 1. Que le sens du mot portion de la surface soit défini\*. 2. Que chacune des portions (1), (2), ..., possède une aire (la définition étant  $T_4$ ),  $T_4^{(1)}$ ,  $T_4^{(2)}$ , ..., et que

$$T_4 = T_4^{(1)} + T_4^{(2)} + \dots **.$$

3. Que en projetant orthogonalement les points d'une portion (1), (2), ..., sur un plan quelconque, cette projection possède une aire  $u_1, u_2, \dots$ ,\*\*\*.

Soit  $\delta > 0$ , d'ailleurs arbitraire. Soit de plus  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ , une suite de polyèdres inscrits dans la portion (k), telle comme nous l'avons définies au Chap. I, en définissant l'ensemble IV. Soit  $\mathcal{A}'_1 t, \mathcal{A}'_2 t, \dots$ , la somme des aires des triangles qu'on obtient, lorsqu'on projette orthogonalement les triangles de  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ , sur le plan considéré.

Nous supposons 4. qu'on puisse démontrer, qu'en prenant s assez grand,

$$\mathcal{A}'_s t \geq u_k - \delta.$$

\* Dans le cas de la surface  $z = f(x, y)$ , dont l'aire est finie la définition des portions sera donné tout de suite.

\*\* M. LEBESGUE démontre, la définition de l'aire étant  $T_2$ , qu'une telle décomposition est possible; Thèse p. 77.

\*\*\* Je crois pouvoir affirmer avec beaucoup de certitude qu'en général la projection d'une surface rectifiable sur un plan quelconque n'a pas d'aire.

On démontre ainsi que  $T_4^{(k)} \geq u_k$ .

Je remarque que dans le cas de la surface  $z = f(x, y)$  j'ai trouvé des déterminations très générales pour les portions satisfaisant aux conditions décrites. Les contours (ou mieux frontières) de ces portions ne sont pas des lignes courbes, mais des figures plus générales\*.

Nous définissons comme portion de la surface  $z = f(x, y)$ , la surface qui est définie par l'équation  $z = f(x, y)$ , le point  $x, y$  variant dans une domaine renfermée par une ligne courbe à longueur finie, simplement fermée. Bien entendu, dans ce cas il n'importe qu'on considère les points de la ligne courbe comme appartenant ou non au domaine.

2. Décomposons la surface en portions en nombre fini. Séparons les portions, et transportons chacune d'elles, sans déformation, en une position finale arbitraire. Projetons orthogonalement les points de chacune de ces portions sur un plan fixe et soient  $u_1, u_2, \dots$ , les aires de ces projections.

Soit  $u_1 + u_2 + \dots = U$ .

La limite supérieure de tous les  $U$  possibles est, pour nos surfaces, égale à  $T_6$ , c'est à dire à  $t$ .

\* En désignant par  $Q$  la projection orthogonale de la frontière sur le plan  $xy$ , les conditions sont remplies lorsque l'on a ( $t$  étant fini)

$$\alpha_Q = \beta_Q = \gamma_Q = 0.$$

Soit  $s$  une ligne courbe à longueur finie, située dans le rectangle  $(0, a; 0, b)$ , on a ( $t$  étant fini)

$$\alpha_s = \beta_s = \gamma_s = 0.$$

Lorsque  $s$  est simplement fermé, la quantité  $t'$  analogue à  $t$  pour l'aire limitée par la courbe, et la quantité  $t''$  pour le reste du rectangle  $(0, a; 0, b)$  ont  $t$  pour somme, ( $t$  étant fini).

La ligne correspondante de la surface, est quarrable sur la surface, d'après la définition de M. LEBESGUE, Thèse, p. 79.

Citons encore un théorème analogue. Désignons par  $z'$  la projection orthogonale de la section  $z = \text{const.}$  sur le plan  $xy$ . L'ensemble des  $z$  pour lesquels  $\alpha_{z'} > 0$ , est (s'il existe) fini ou au plus dénombrable, la surface  $z = f(x, y)$  étant d'ailleurs quelconque.

Pour la surface à aire finie, l'ensemble des  $z$  pour lesquels

$$\beta_{z'} + \gamma_{z'} > 0$$

est (s'il existe) fini ou dénombrable.

On a par hypothèse

$$u_1 \leq T_4^{(1)}, \quad u_2 \leq T_4^{(2)}, \dots, \\ U = u_1 + u_2 + \dots, \quad T_4 = T_4^{(1)} + T_4^{(2)} + \dots.$$

Ainsi  $U \leq T_4$ , donc la limite supérieure  $U_1$  des  $U$  est  $\leq T_4$ .  
Considérons notre première surface. Soit  $X_{i_r} Y_{m_r}$  une division de la suite du No. 1 du Chap. IX.

Lorsque  $\lambda_{i,j} = 1$  (Chap. VIII), transportons  $f_{i,j}$  (Chap. III) dans une position telle que  $AB'CD$  (Chap. IX) soit parallèle au plan fixe. Désignons par  $u_{i,j}$  l'aire de la projection de  $f_{i,j}$  sur le plan fixe.

En considérant que  $AB'CD$  est une figure plane et que la surface simplement connexe, formée par les cinq surfaces  $f_{i,j}$ ,  $\theta_{i,j}^y$ ,  $\theta_{i,j}^x$ ,  $\theta_{i,j+1}^x$ ,  $\theta_{i+1,j}^y$  contient le contour de  $AB'CD$ , on obtient

$$(AB'CD) < u_{i,j} + \theta_{i,j}^y + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i+1,j}^y.$$

Transportons le  $f_{i,j}$  où  $\lambda_{i,j} = 0$ , dans une position telle qu'il occupe, par rapport au plan fixe, la même position que celle qu'il occupait (en faisant partie de la surface) par rapport au plan  $yz$ . On voit que

$$\gamma_{i,j} \leq u_{i,j}.$$

Donc

$$X_{i_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} (AB'CD) + X_{i_r} Y_{m_r} \varepsilon_{i,j} \cdot \gamma_{i,j} \\ \leq X_{i_r} Y_{m_r} u_{i,j} + X_{i_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} (\theta_{i,j}^y + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i+1,j}^y).$$

Mais, d'après le Chap. IX et VIII, pour  $r = \infty$  le premier membre est égal à  $T_6$  et le second terme du deuxième membre est égal à 0; de plus  $X_{i_r} Y_{m_r} u_{i,j}$  est une valeur de  $U$ .

On aura donc

$$U_1 = T_4 = t = T_6.$$

On démontre de la même manière que pour notre deuxième surface

$$U_1 = T_4 = t = T_6.$$

## Chapitre XII.

### Sur Pinvariant.

1. Je suppose qu'une figure dite ligne courbe et située sur une surface ait la propriété suivante: Il existe des portions qui la contiennent, et on peut varier chacune de ces portions de

manière que sa limite soit la ligne courbe et cette ligne seulement, de plus, que la limite de l'aire de la portion (la définition de l'aire étant  $T_4$ ) soit égale à zéro\*.

Pour la surface  $z = f(x, y)$ , dont l'aire est finie, ces conditions sont remplies, lorsque la projection orthogonale sur le plan  $xy$  de la ligne courbe est une ligne courbe ouverte, sans point double, à longueur finie.

2. Soit  $x', y', z'$  un système de coordonnées rectangulaires. Partageons la surface par des lignes courbes, et projetons orthogonalement les points de chaque portion sur les plans  $x'y', x'z', y'z'$ . Ces projections, par hypothèse (No. 1, 4. Chap. XI), auront des aires. Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les aires des trois projections d'une portion, et soit  $R$  la somme des toutes les valeurs

$$[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous partageons la surface, par des lignes toujours plus serrées, de manière que chaque portion diminue indéfiniment, c'est à dire que chaque distance qui existe entre deux points quelconques de chacune des portions, décroisse sans limite\*\*.

Le nombre des portions, quoique restant toujours fini, croît évidemment sans limite.

Pour cette variation,  $\lim R$  est déterminé et indépendant de la manière suivant laquelle la surface a été partagée.

Car, si nous diminuons les portions de manière que chacune d'entre elles soit divisée en plusieurs parties, au lieu d'un seul membre  $[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2]^{\frac{1}{2}}$  nous en aurons plusieurs

$$[\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2]^{\frac{1}{2}}, [\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2]^{\frac{1}{2}}, \dots,$$

dans la somme  $R$ .

Et on aura évidemment

$$\alpha < \alpha_1 + \alpha_2 + \dots, \quad \beta < \beta_1 + \beta_2 + \dots, \quad \gamma \leq \gamma_1 + \gamma_2 + \dots,$$

\* C'est la définition de M. LEBESGUE pour la ligne quarrable sur la surface — la définition de l'aire étant  $T_2$ .

Une ligne quarrable sur la surface pour  $T_4$  est aussi quarrable pour  $T_2$ , la réciproque doit être démontrée.

\*\* La possibilité d'une telle décomposition (la définition de l'aire étant  $I_2$ ) a été démontré par M. LEBESGUE. Thèse, p. 77. 78.

Donc, d'après le Chap. IV, la suite des valeurs  $R$  est une suite non décroissante et ainsi pour chaque « suite de divisions »  $\lim R$  est déterminé.

On démontre, à l'aide du No. 1 et du No. 1. 4. du Chap. XI, que  $\lim R$  est indépendant de la « suite des divisions de première espèce ou non ».

Et d'après le Chap. XI,  $\lim R \leq T_4$ .

3. Supposons que la surface  $z = f(x, y)$  satisfasse à la condition de LIPSCHITZ\*.

Nous démontrerons que  $\lim R$  est indépendant du système de coordonnées rectangulaires et que sa valeur est  $T_4 = T_6 = t$ .

Prenons une suite des polyèdres  $\mathcal{A}$  constitués par des triangles  $ABC, ADC$  (Chap. IX).

Projetons les points de  $f_{i,j}$  sur les plans  $x'y', x'z', y'z'$  de nouvelles coordonnées rectangulaires.

Soient  $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}$  les aires de ces projections.  $AB'CD$  est une figure plane. La surface simplement connexe composée des cinq surfaces

$$f_{i,j}, \theta_{i,j}^y, \theta_{i,j}^x, \theta_{i,j+1}^x, \theta_{i+1,j}^y$$

contient la ligne  $AB'CD$ .

Il en résulte que

$$(AB'CD)_z \leq A_{i,j} + \theta_{i,j}^y + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i+1,j}^y,$$

$(AB'CD)_z$  désignant l'aire de la projection de  $AB'CD$  sur le plan  $x'y'$ .

Des relations analogues subsistent pour les projections sur les plans  $x'z', y'z'$ .

En élevant au carré, ajoutant et extrayant la racine carrée, on aura

$$(AB'CD) \leq [A_{i,j}^2 + B_{i,j}^2 + C_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}} + 3(\theta_{i,j}^x + \theta_{i,j}^y + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i+1,j}^y).$$

En considérant que\*\*)

\* Savoir:

$$\frac{|f(x_1, y_1) - f(x, y)|}{[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{\frac{1}{2}}} < G \quad \text{pour } (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 > 0.$$

\*\* Dans ce cas on a pour chaque rectangle  $\lambda_{i,j} = 1$ .

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}}(A B C D) = T_4 = t = T_6,$$

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} [A_{i,j}^2 + B_{i,j}^2 + (C_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}}] = \lim R,$$

$$X_{l_{\infty}} Y_{m_{\infty}} (\theta_{i,j}^{xy} + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^{xz} + \theta_{i+1,j}^y) = 0$$

on aura

$$T_4 \leq \lim R.$$

C'est à dire

$$\lim R = T_4 = t = T_6.*$$

On démontre, d'une manière analogue, que le théorème s'applique aussi à notre deuxième surface.

### Chapitre XIII.

#### Note sur la quadrature de la surface $z = f(x, y)$ .

On conclut du No. 8 du Chap. VIII et des Chap. IX, XI, XII, qu'en choisissant une division convenable pour la plus grande partie des rectangles, les triangles  $ABC$ ,  $ADC$  sont aptes à résoudre les trois problèmes suivantes.

I. Démontrer que  $T_4 = t$ . Chapitre IX.

II. Démontrer que  $U_1 = T_4$ . Chapitre XI.

III. Démontrer que  $\lim R = T_4$ . Chapitre XII.

Le  $\mathcal{A}$  du Chap. I qui sert à résoudre ces trois problèmes est donc en partie définie.

Il reste donc à le définir au-dessus des rectangles exceptionnels, pour lesquels la somme de leurs aires peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

Nous soumettrons ces rectangles à des subdivisions convenablement choisies, et nous obtiendrons, par le même procédé, de nouvelles portions de  $\mathcal{A}$ , propres à résoudre les trois problèmes.

Mais en général, il reste de nouveau des rectangles exceptionnels, que l'on soumettra à de nouvelles subdivisions et l'on voit,

---

\* Les théorèmes relatifs à la surface  $z = f(x, y)$  et satisfaisant à la condition de LIPSCHITZ furent publiés en 1906 en langue hongroise. Un extrait en a paru dans les Comptes Rendus, 1907 fév. 14.

qu'en général, après un nombre quelconque de subdivisions, il reste toujours des rectangles exceptionnels.\*

On peut évidemment, continuer le procédé indéfiniment et de telle manière que l'ensemble relativement parfait  $Q$  des points, dont chacun est le point d'un rectangle exceptionnel, pour chacune des subdivisions, ait zéro pour mesure extérieure, dans le sens de M. JORDAN.

Je dis que l'on doit considérer  $Q$ , quoique ayant les propriétés décrites, comme arbitraire.

Quoique l'on puisse conclure du Chapitre VIII que les rectangles exceptionnels sont tels que pour certains points de leurs contours  $|\lambda_x| + |\lambda_y|$  est très grand, et que, dans le voisinage d'un point quelconque de  $Q$   $|\lambda_x| + |\lambda_y|$  dépasse toute limite, on n'obtient par là aucun renseignement sur  $Q$ , car c'est pour la surface générale  $z = f(x, y)$  la propriété d'un point quelconque.

De plus les divisions et les subdivisions se font entre de très larges limites arbitraires.

Or la quadrature de la surface  $z = f(x, y)$  dépend de ses propriétés relativement à un ensemble  $Q$ ,  $Q$  étant relativement parfait, à étendue 0 et situé dans  $(0, a, 0, b)$ .

Si l'on avait pour chaque  $Q$

$$\beta_Q = \gamma_Q = 0,$$

on pourrait achever la quadrature (en poussant les subdivisions assez loin) par une dernière subdivision, et on démontrerait les théorèmes I, II, III comme pour notre deuxième surface.

Si l'on avait pour chaque  $Q$

$$\beta_Q = 0, \quad \gamma_Q \text{ en général } > 0$$

on pourrait de même achever la quadrature par une dernière subdivision rectangulaire, mais on ne démontre que les théorèmes I et II comme pour notre première surface.

Nous allons citer une classe très générale de surfaces  $z = f(x, y)$  pour lesquelles on a

$$\beta_Q = 0.$$

---

\* Nous omettons la description de la manière dont on établit la connexion entre les portions de  $\mathcal{A}$ , acquises pas à pas.

Soit  $z = \varphi(y)$  une ligne courbe définie dans  $(0, b)$ .

Soit  $P$  un ensemble fermé à étendue linéaire 0, situé sur l'axe  $y$ . Renfermons le dans des intervalles en nombre fini, et soit  $d$  la somme de leurs longueurs. Soit  $s$  la somme des longueurs des arcs de  $\varphi(y)$  qui correspondent à ces intervalles. On sait que

$$\lim_{d=0} s$$

est déterminé et indépendant du choix et du mode de décroissance des intervalles.

Lorsqu'il existe au moins un  $P$ , tel que l'on ait

$$\lim_{d=0} s > 0^*,$$

je dis que la ligne courbe est une ligne courbe ordinaire.

Lorsque,  $S(x)$  étant bornée ou non, l'aire de la surface est finie,\*\* et l'ensemble des  $x$ , pour lesquels les sections  $x = \text{const.}$  sont des lignes courbes ordinaires est un ensemble de première catégorie, on a toujours

$$\beta_q = 0.$$

Une telle surface est, par exemple, celle pour laquelle la limite supérieure des  $\lambda_y$  est égale à  $+\infty$ , et dont chaque section  $x = \text{const.}$  satisfait à la condition de LIPSCHITZ.\*\*\*

Mais, dans le cas général, on a

$$\beta_q > 0, \quad \gamma_q > 0.$$

Désignons par  $p$  les rectangles qu'on doit soumettre d'après la première division à des subdivisions.

Par le choix convenable de la première division,  $\alpha_p$  est aussi petite que l'on veut, mais ce ne sera pas ainsi pour  $\beta_p, \gamma_p$ .

En considérant qu'on peut regarder dans un certain sens  $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ , comme la contribution des plans  $xy, xz, yz$ , pour l'aire par les portions de  $f$  situées au-dessus des rectangles  $p$ , et qu'il était possible de rendre par une division du plan  $xy$ ,  $\alpha_p$  aussi

---

\* On a en général  $\lim_{d=0} s = +\infty$ .

\*\* On au moins  $\int_0^a S(x) dx < +\infty$ .

\*\*\* On a pour les classes décrites de  $z = f(x, y)$ ,  $I_0 = t$ .

petit que l'on veut, il est très naturel de songer à définir, au-dessus des  $p$ , de nouvelles portions de  $\mathcal{A}$ , à l'aide des divisions rectangulaires du plan  $xz$ .

On peut espérer par là qu'on puisse définir de nouvelles portions de  $\mathcal{A}$ , et que les portions de  $f$ , auxquelles, après ce procédé, n'appartiennent pas de portions de  $\mathcal{A}$ , soient telles que seule leur contribution relative au plan  $yz$ , ait une valeur dont on doit tenir compte.

En traitant ces portions de la même manière relativement au plan  $yz$ , on obtient de nouvelles portions de  $\mathcal{A}$ , et les portions de  $f$ , pour lesquelles le  $\mathcal{A}$  n'est pas encore défini, donnent des contributions de quantité négligeable à l'aire, relativement aux trois plans des coordonnées.

On achève l'inscription de  $\mathcal{A}$  par une subdivision du plan  $xy$ , et en établissant la connexion entre les diverses portions de  $\mathcal{A}$ .\*

Et l'on résout les problèmes I. II. III.

Mais, pour procéder ainsi, on doit vaincre une difficulté assez grande.

On doit démontrer que les sections  $x = \text{const.}$   $z = \text{const.}$  de la surface  $z = f(x, y)$ , dont l'aire est finie ont toutes les propriétés des sections  $x = \text{const.}$   $y = \text{const.}$  qui facilitaient l'inscription des portions de  $\mathcal{A}$  par des divisions rectangulaires du plan  $xy$ .

Nous allons communiquer sans démonstrations les principaux théorèmes qui, en traitant la surface  $z = f(x, y)$  par des divisions rectangulaires du plan  $xz$ , permettent d'obtenir des résultats analogues à ceux des Chapitres VIII, IX.

Pour donner une idée préliminaire, nous remarquons que nous remplacerons les portions de  $z = f(x, y)$  par des portions  $z = \varphi(x, y)$ , telles que, lorsque  $y_2 - y_1 \geq 0$ , on ait pour l'une de ces portions ou

$$\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1) \geq 0,$$

ou

$$\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1) \leq 0.$$

**Théorème I.** Soit  $s$  une ligne courbe simplement fermée à longueur finie, situé dans  $(0, a; 0, b)$ . Soit  $U$  l'aire

---

\* Ces faces, qui établissent la connexion, ont une aire aussi petite que l'on veut — surtout à cause de la petitesse la quantité  $t$  correspondante.

renfermée par  $s$ , et soit  $t_U$  la quantité  $t$  pour  $U$ . Soit  $V$  l'aire qui complète  $U$  à  $(0, a; 0, b)$ , et désignons par  $t_V$  la quantité  $t$  pour  $V$ . On a (voir Chap. XI)

$$t_U + t_V = t.^*$$

**Théorème II.** Soit  $f'$  la portion de  $z = f(x, y)$  qui corresponde à  $U$ . Projetons les points de  $f'$  sur les plans des coordonnées. Ces projections possèdent des aires. Désignons-les par  $\alpha, \beta, \gamma$ . On a

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}} < t_{f'}.$$

De plus, les suppositions 3., 4. du Chap. XI sont exactes.

Prenons une division  $X_i Y_m$ , telle que  $S(y_j) < +\infty$ .\*\*

Considérons la figure  $\beta_{i,j}$ .

Nous supposons  $f(x, y) > 0$ . Soit  $(0, a; 0, c)$  un rectangle du plan  $xz$ , renfermant les projections orthogonales de  $z = f(x, y)$  sur le plan  $xz$ .

Soit  $X_L Z_N$  une division rectangulaire de  $(0, a; 0, c)$ .

Lorsque l'aire de  $\beta_{i,j}$  est positive, en choisissant  $X_L Z_N$  d'une manière convenable, quelques-uns de ses rectangles seront situés à l'intérieur de  $\beta_{i,j}$ .

Soit  $(x_k, x_{k+1}; z_h, z_{h+1})$  un tel rectangle. Supposons que dans  $(x_k, x_{k+1})$  on ait  $f(x, y_{j+1}) > f(x, y_j)$ .

Dans tous ce qui va suivre nous conservons cette supposition; on verra facilement les modifications causées par le cas contraire.

Nous désignons par  $h_1$  et  $h_2$  ( $h_2 > h_1$ ) les nombres entiers pour lesquels  $(x_k, x_{k+1}; z_{h_1}, z_{h_2})$  est contenu dans  $\beta_{i,j}$ , mais  $(x_k, x_{k+1}; z_{h_1-1}, z_{h_1})$  et  $(x_k, x_{k+1}; z_{h_2}, z_{h_2+1})$  ont au moins un point qui n'est pas situé à l'intérieur de  $\beta_{i,j}$ .

Désignons par  $m, M$ , le minimum respectivement le maximum des valeurs de  $z = f(x, y)$  dans  $(x_k, x_{k+1}; y_j, y_{j+1})$ . Soit  $d > 0$ .

Nous définissons dans  $(x_k, x_{k+1}; y_j - d, y_{j+1} + d)$  une surface  $z = \lambda(x, y)$  de la manière suivante.

\* Dans tous ce qui suit nous supposons que  $t$  soit fini.

\*\* Nous supposons  $S_x(a, 0) < +\infty$ ,  $S_x(a, b) < +\infty$ .

Dans  $(x_k, x_{k+1}; y_j - d, y_j)$ ,  $z = \lambda(x, y)$  sera le conoïde dont l'une de ses directrices est la ligne droite

$$y = y_j - d, \quad z = m - d,$$

l'autre est la ligne courbe à longueur finie

$$y = y_j, \quad z = f(x, y_j),$$

et dont les génératrices sont parallèles au plan  $yz$ .

Au-dessus de  $(x_k, x_{k+1}; y_j, y_{j+1})$  soit  $\lambda(x, y) = f(x, y)$ .

Au-dessus de  $(x_k, x_{k+1}; y_{j+1}, y_{j+1} + d)$ ,  $z = \lambda(x, y)$  sera le conoïde ayant pour directrices la ligne courbe à longueur finie:

$$y = y_{j+1}, \quad z = f(x, y_{j+1}),$$

et la ligne droite

$$y = y_{j+1} + d, \quad z = M + d,$$

et dont les génératrices sont parallèles au plan  $yz$ .

On prouve facilement que l'aire de la surface  $z = \lambda(x, y)$  est finie.

**Théorème III.** On peut construire une surface  $z = \lambda_1(x, y)$  au-dessus de  $(x_k, x_{k+1}; y_j - d, y_{j+1} + d)$  ayant les propriétés suivantes.

1.  $m - d \leq \lambda_1(x, y) \leq M + d$ .
2. Ses sections  $z = m - d$ ,  $z = M + d$  se confondent avec celles de  $z = \lambda(x, y)$ .
3. Chacune de ses sections  $z = \text{const.}$  est d'un seul tenant.\*
4. Lorsque la mesure extérieure et plane de sa section  $z = \text{const.}$  est égale à zéro, cette section est située sur  $z = \lambda(x, y)$ .
5. La quantité  $t$  pour  $\lambda_1$  est au plus égale à celle de  $\lambda$ .

**Théorème IV.** Il existe un ensemble de seconde catégorie  $\bar{Z}$  de  $(m - d, M + d)$ , tel que la section  $z = \bar{Z} = \text{const.}$  ( $\bar{Z}$  désigne aussi un point de l'ensemble  $\bar{Z}$ ) de  $\lambda_1$  est com-

\* Nous disons qu'une figure est d'un seul tenant, lorsqu'elle est parfait, et lorsque, pour chaque couple  $A, B$  de ses points et pour chaque  $\delta > 0$ , il existe une ligne polygonale allant de  $A$  à  $B$ , dont les côtés sont plus petits que  $\delta$  et dont les sommets sont des points de la figure, JORDAN, Cours d'Analyse T. I.

posée d'une seule ligne courbe  $U(\bar{Z})$  à longueur finie.\* Cette ligne courbe n'a pas des points doubles, et en partant d'un point du plan  $x = x_k$  elle va jusqu' à  $x = x_{k+1}$ .

Un plan normale à l'axe des  $x$  peut couper la courbe en une infinité de points.

Ayant  $\bar{Z}_1 < \bar{Z}_2$ , la courbe  $U(\bar{Z}_1)$  a des points plus près du plan  $xz$ , que la courbe  $U(\bar{Z}_2)$ .

Désignons aussi par  $U(\bar{Z})$  la longueur de  $U(\bar{Z})$ .  $U(\bar{Z})$  est une fonction semicontinue sur l'ensemble  $\bar{Z}$  et

$$\int_{m-d}^{M+d} U(\bar{Z}) \cdot dz < +\infty. **$$

L'ensemble  $\bar{Z}$  étant partout dense dans  $(m-d, M+d)$ , on peut choisir deux  $z''_h, z'_{h+1}$ , ( $z''_h < z'_{h+1}$ ) de ses points, tels que ( $z''_h, z'_{h+1}$ ) soit compris dans  $(z_h, z_{h+1})$  et que  $z''_h - z_h, z_{h+1} - z'_{h+1}$ , soient aussi petites que l'on veut.\*\*\*

Désignons aussi par  $U(\bar{Z})$  la projection de  $U(\bar{Z})$  sur le plan  $xy$ .

Considérons le domaine du plan  $xy$  qui est renfermée par les lignes droites

$$x = x_k, \quad x = x_{k+1},$$

et par les lignes courbes  $U(z''_h), U(z'_{h+1})$ .

Nous désignerons ce domaine par  $(x_k, x_{k+1}; U(z''_h), U(z'_{h+1}))$  et nous emploierons dans de cas semblables la notation analogue.

Ce domaine est contenu dans  $(x_k, x_{k+1}; y_j, y_{j+1})$ , de plus les courbes  $U(Z)$  de la portion de  $z = \lambda_1(x, y)$  qui est située au-dessus du domaine, sont situées sur  $z = f(x, y)$ . La projection sur le plan  $xz$  de la portion considérée de  $z = \lambda_1(x, y)$  est évidemment  $(x_k, x_{k+1}; z''_h, z'_{h+1})$ .

Prenons une division rectangulaire  $I$  de  $(x_k, x_{k+1}; z''_h, z'_{h+1})$

\* M. LEBESGUE démontre (Thèse p. 77) que pour certaines valeurs de  $x$ , la section  $x = \text{const.}$  d'une surface quelconque, mais à aire  $T_2$  finie, contient une ligne courbe à longueur finie.

\*\* Les démonstration furent communiquées à l'Académie hongroise, voir Mathem. és Term. tud. Értesítő, t. XXVI (1908) p. 475 et suiv. J'ai n'ajouté les théorèmes V—VIII qu'au mois de Mai 1909.

\*\*\*  $z''_h$  et  $z'_h$  ne dépendent que de  $h$ .

de manière que les points diviseurs de  $(z''_h, z'_{h+1})$  soient des points de l'ensemble  $\bar{Z}$ .

Soit  $(x^I_k, x^I_{k+1}; z^I_h, z^I_{h+1})$  l'un des rectangles de  $I$ .

Dans tout ce qui suit nous parcourons les lignes courbes  $U(\bar{Z})$  en partant de leur point situé sur  $x = x_k$  vers leur point situé sur  $x = x_{k+1}$ .

On prouve facilement, qu'il existe au moins un arc  $U_1(z^I_h)$  de  $U(z^I_h)$  et un arc  $U_1(z^I_{h+1})$  de  $U(z^I_{h+1})$  tel que ces arcs sont compris dans la bande des lignes droites parallèles

$$x = x^I_k, \quad x = x^I_{k+1},$$

en les rejoignant.

De plus  $U_1(z^I_h)$  a des points plus près de l'axe des  $x$  comme  $U_1(z^I_{h+1})$ , et dans le domaine  $(x^I_k, x^I_{k+1}; U_1(x^I_h), U_1(x^I_{h+1}))$  ni  $U(x^I_h)$  ni  $U(x^I_{h+1})$  n'ont pas des arcs rejoignant les deux droites, enfin en parcourant  $U(z^I_h)$ ,  $U(z^I_{h+1})$  on arrive d'abord à l'extrémité de  $U_1(z^I_h)$  respectivement de  $U_1(z^I_{h+1})$  qui est situé sur  $x = x^I_k$ .

De plus  $\bar{Z}$  étant un point de l'ensemble  $\bar{Z}$ , et tel que  $z^I_h < \bar{Z} < z^I_{h+1}$ , il existe dans  $(x^I_k, x^I_{k+1}; U_1(z^I_h), U_1(z^I_{h+1}))$  un arc  $U_1(\bar{Z})$  de  $U(\bar{Z})$  étant en même relation à  $U_1(z^I_h)$  comme  $U_1(z^I_{h+1})$ .

Désignons par  $\varrho(x)$  l'ordonnée du point de  $U_1(\bar{Z})$  qui est le plus près de l'axe des  $x$  sur la ligne droite  $x = \text{const.}$  La fonction  $\varrho(x)$  est donc définie dans  $(x^I_k, x^I_{k+1})$  de plus elle est bornée et uniforme.

$\varrho(x-0)$  et  $\varrho(x+0)$  existent et l'une de ces valeurs est égale à  $\varrho(x)$ . Les points  $x$ ,  $\varrho(x-0)$ , et  $x$ ,  $\varrho(x+0)$  sont situés sur  $U_1(\bar{Z})$ . Considérons la figure formée par les points  $x$ ,  $\varrho(x)$  et par les distances rectilignes rejoignant les points  $x$ ,  $\varrho(x-0)$  et  $x$ ,  $\varrho(x+0)$ . Cette figure est une ligne courbe. Chaque ligne droite  $x = \text{const.}$  la coupe ou dans un seul point, ou dans un intervalle.

En parcourant la courbe dans le sens des  $x$  croissants on rencontre ceux de ses points qui ne sont pas à l'intérieur de ses intervalles parallèles à l'axe  $y$ , dans la même ordre qu'en parcourant  $U_1(\bar{Z})$ .

Désignons par  $S(\bar{Z})$  cette ligne courbe et soit aussi  $S(\bar{Z})$  sa longueur. On a  $S(\bar{Z}) \leq U_1(\bar{Z})$ .

Nous désignerons dans ce qui va suivre aussi par  $S(\bar{Z})$  la figure qui est situé dans le plan  $z = \bar{Z}$  et dont la projection sur le plan  $xy$  est  $S(\bar{Z})$ .

**Théorème V.** On peut construire au-dessus de

$$(x_h^I, x_{h+1}^I; S(z_h^I), S(z_{h+1}^I))$$

une surface  $z = \varphi(x, y)$  ayant les propriétés suivantes:

1. Pour  $y_2 > y_1$  on aura  $\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1) \geq 0$ .

2. Il existe un ensemble de seconde catégorie  $Z$  dans  $(z_h^I, z_{h+1}^I)$ , partie de  $\bar{Z}$ , telle que la section  $z = \bar{Z}$  de  $z = \varphi(x, y)$  est  $S(Z)$

3. La longueur de  $S(\bar{Z})$  est semicontinue sur l'ensemble  $\bar{Z}$  et

$$\int_{z_h^I}^{z_{h+1}^I} S(\bar{Z}) dz < +\infty.$$

4. L'aire de  $z = \varphi(x, y)$  est finie.

La projection de  $z = \varphi(x, y)$  sur le plan  $xz$  est évidemment  $(x_h^I, x_{h+1}^I; z_h^I, z_{h+1}^I)$ .

Soit  $\Pi$  une division rectangulaire de  $(x_h^I, x_{h+1}^I; z_h^I, z_{h+1}^I)$ , et telle que les points diviseurs de  $(z_h^I, x_{h+1}^I)$  soient des points de  $\bar{Z}$ . Soit  $(x_k^{II}, z_{k+1}^{II}; z_h^{II}, z_{h+1}^{II})$  l'un des rectangles de  $\Pi$ .

Parcourons la ligne courbe  $S(z_h^{II})$  (située dans le plan  $z = z_h^{II}$ ) dans le sens des  $x$  croissants.

Soit  $A$  son dernier point dans le plan  $x = x_k^{II}$ ,  $D$  son premier point dans le plan  $x = x_{k+1}^{II}$ .

Les points analogues dans les mêmes plans pour  $S(z_{h+1}^{II})$  soient  $B$  et  $C$ .  $A, B, C, D$ , sont évidemment situés sur  $z = f(x, y)$ .

**Théorème VII.** On peut faire pour  $z = \varphi(x, y)$  des recherches analogues à celles des Chapitres VIII et IX relatives au plan  $xz$ .

**Remarque.** On doit étendre les discussions du No. 8 du Chap. VII à des fonctions semicontinues définies sur un ensemble de seconde catégorie.

Nous désignerons par  $E_1 H_1$  l'arc de  $U_1(z_h^{II})$  qui dans la bande des lignes parallèles  $x = x_k^{II}$ ,  $x = x_{k+1}^{II}$  rejoint ces deux droites, et qui entre de telles arcs de  $U_1(z_h^{II})$  a des points les plus près de l'axe des  $x$ .

Soit  $\widehat{F_1 G_1}$  le même arc pour  $U_1(z_{h+1}^{II})$ .

Les lignes courbes correspondantes à  $\widehat{E_1 H_1}$ ,  $\widehat{F_1 G_1}$  sur  $z = f(x, y)$  soient  $\widehat{EH}$ ,  $\widehat{FG}$ .

L'ordre des points  $A, E, F$ , est toujours  $A, E, F$ , en parcourant la section  $x = x_k^{II}$  dans le sens des  $y$  croissants.

Il peut arriver que l'ordre de  $A, B, E, F$ , respectivement de  $D, C, H, G$ , soit en même temps  $A, E, B, F$ , et  $D, H, C, G$ , en parcourant les sections  $x = x_k^{II}$ ,  $x = x_{k+1}^{II}$  dans le sens des  $y$  croissants.

Nous disons dans ce cas que la portion de  $z = f(x, y)$  située au-dessus de  $(x_k^{II}, x_{k+1}^{II}; \widehat{E_1 H_1}, \widehat{F_1 G_1})$  est une portion de seconde espèce  $f''$  (celles de première espèce sont les  $f_{i,j}$ ).

Désignons par  $\theta_1$  l'aire renfermée par

$$\overline{AB}, \overline{BF}, \widehat{FE}, \overline{EA},$$

dans le plan  $x = x_k^{II}$ .

Soit  $\theta_2$  l'aire renfermée par

$$\overline{BC}, \overline{CG}, \widehat{GF}, \overline{FB},$$

dans le plan  $z = z_{h+1}^{II}$ .

Désignons par  $\theta_3$  l'aire renfermée par

$$\overline{CD}, \overline{DH}, \widehat{HG}, \overline{GC}.$$

Soit  $\theta_4$  l'aire renfermée par

$$\overline{DA}, \overline{AE}, \widehat{EH}, \overline{HD}.$$

Soit  $B'$  le sommet opposé à  $D$  dans le parallélogramme  $AB'CD$ . Les coordonnées  $x, z$  de  $B'$  sont  $x_k^{II}$ ,  $z_{h+1}^{II}$ .

Soit  $\theta_1'$  l'aire renfermée par  $\overline{AB'}$ ,  $\overline{B'F}$ ,  $\widehat{FE}$ ,  $\overline{EA}$ .

Soit  $\theta_2'$  l'aire renfermée par  $\overline{B'C}$ ,  $\overline{CG}$ ,  $\widehat{GF}$ ,  $\overline{FB}$ .

On a

$$\begin{aligned} |(ABC + ADC) - (AB'CD)| &\leq ABB' + BB'C, \\ |\theta_1 - \theta_1'| &\leq ABB', \quad |\theta_2 - \theta_2'| \leq BB'C. \end{aligned} \quad (a)$$

Soit  $[f']$  une certaine valeur formée pour  $f'$ , et désignons par  $\sum[f']$  la somme de tous les  $[f']$ , le nombre de ces  $[f']$  étant par là égal à celui des  $f'$ .

**Théorème VIII.** Soit  $w$  un nombre positif donné à l'avance. On peut construire les divisions  $X_i Y_m$ ,  $X_L Z_N$ , les  $z_h''$ ,  $z_{h+1}'$ , les divisions  $I$  et les  $II$  de manière que pour

certaines des  $f'' \lambda$  soit égal à 1, pour les autres à zéro et que l'on ait:

1. Les dimensions linéaires des  $f''$  pour lesquels  $\lambda = 1$ , sont plus petites que  $w$ .

$$2. \quad XY\beta_{i,j} - \sum \lambda \cdot (x_{k+1}^{II} - x_k^{II}) \cdot (z_{h+1}^{II} - z_h^{II}) < w.$$

$$3. \quad \sum \lambda \cdot (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) < w.$$

$$4. \quad \sum \lambda \cdot (ABB' + BB'C) < w.$$

A l'aide du théorème II on obtient

$$(AB'CD) \leq t' + (\theta_1' + \theta_2' + \theta_3 + \theta_4)$$

en désignant par  $t'$  la quantité  $t$  de  $f''$ .

Donc d'après (a)

$$ABC + ADC \leq t' + (ABB' + BB'C) + (ABB' + BB'C) + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4),$$

enfin

$$\sum \lambda (ABC + ADC) \leq \sum t' + 3w. \quad (b)$$

(b) et 3. prouvent que l'amas des triangles  $ABC$ ,  $ADC$  ( $\lambda = 1$ ) est propre à résoudre le problème I, et 2. prouve que les portions de  $z = f(x, y)$  extérieures des  $f''$  ( $\lambda = 1$ ), fournissent une contribution pour l'aire qui est plus petite que  $w$  relativement au plan  $xz$ . On prouve de même que cet amas est propre à résoudre les problèmes II et III.

## Chapitre XIV.

### Quadrature des surfaces rectifiables.

1. Soient

$$z = f^{(h)}(x, y), \quad (h = 1, 2, 3)$$

trois surfaces définies au-dessus d'un carré  $(0, a; 0, a)$ .

Nous supposons qu'elles satisfont à la condition de LIPSCHITZ. Désignons par  $S^{(h)}(x)$ ,  $S^{(h)}(y)$  les fonctions  $S(x)$ ,  $S(y)$  (Chap. III) relatives à  $f^{(h)}$ .

Il résulte de la condition de LIPSCHITZ, que ces six fonctions semicontinues sont bornées.

Considérons un nouveau système d'axes de coordonnées rectangulaires  $\xi, \eta, \zeta$ .

Les équations

$$\xi = f^{(1)}(x, y), \quad \eta = f^{(2)}(x, y), \quad \zeta = f^{(3)}(x, y),$$

définissent une surface nommée, par M. LEBESGUE. surface rectifiable. Désignons-la par  $R$ .

On démontre facilement que  $T_2$  est finie\*.

2. Désignons respectivement par  $s_y(x)$  et par  $s_x(y)$  la longueur des lignes courbes  $x = \text{const.}$   $y = \text{const.}$  de  $R$ .

Il résulte de la condition de LIPSCHITZ, que les fonctions semicontinues  $s_y(x)$ ,  $s_x(y)$  sont bornées.

Nous supposons que

$$S^{(h)}(x), \quad S^{(h)}(y), \quad (h = 1, 2, 3), \quad s_y(x), \quad s_x(y)$$

sont des fonctions continues, en remarquant que ces restrictions ne sont point essentielles; les résultats que nous allons obtenir, seraient les mêmes si on laisserait à ces huit fonctions toute leur généralité.

Mais les préliminaires n'étant qu'énoncés dans le texte (No. 8f. Chap. VII), nous nous bornons à ce cas.

3. Désignons par  $A_0, B_0, C_0, D_0$  les points de  $R$  qui correspondent aux points  $x_i, y_j, x_i, y_{j+1}, x_{i+1}, y_{j+1}, x_{i+1}, y_j$  du plan  $xy$ .

Désignons par  $R_{i,j}$  la portion de  $R$  qui correspond à

$$(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}).$$

Désignons par  $\widehat{A_0 B_0}$  l'arc qui correspond au côté  $x = x_i$  de

$$(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}).$$

Parcourons l'arc  $\widehat{A_0 B_0}$  de  $A_0$  vers  $B_0$  et parcourons la distance  $A_0 B_0$  de  $A_0$  vers  $B_0$  de manière que les deux points partant en même temps de  $A_0$ , arrivent en même temps en  $B_0$ .

Joignons par une distance rectiligne, les positions occupées respectivement en même instant par les deux points en mouvement. Soit  $\theta_{i,j}^{(1)}$  la surface réglée ainsi engendrée. Soient de plus  $\theta_{i,j}^{(2)}, \theta_{i,j}^{(3)}, \theta_{i,j}^{(4)}$  les surfaces qu'on obtient de la même manière à l'aide des arcs  $\widehat{B_0 C_0}, \widehat{C_0 D_0}, \widehat{D_0 A_0}$ .

Désignons par  $\theta'_{i,j}$  la quantité

$$\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \widehat{A_0 B_0}^{\frac{3}{2}} (\widehat{A_0 B_0} - A_0 B_0)^{\frac{1}{2}},$$

\* Voir: LEBESGUE, Thèse, p. 85—87.

par  $\theta''_{i,j}$ ,  $\theta'''_{i,j}$ ,  $\theta''''_{i,j}$  les quantités analogues relatives à

$$B_0 \widehat{C_0}, C_0 \widehat{D_0}, D_0 \widehat{A_0}.$$

Désignons par  $A^{(h)}$ ,  $B^{(h)}$ ,  $C^{(h)}$ ,  $D^{(h)}$ ,  $B^{(h)'}$ , les points qui sont pour  $f^{(h)}$  ce que  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $B'$  étaient pour  $f$  dans le Chap. IX.

Soit  $B_0'$  le point dont les coordonnées  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ , sont les coordonnées  $z$  de  $B^{(1)'}$ ,  $B^{(2)'}$ ,  $B^{(3)'}$ .

$A_0 B_0' C_0 D_0$  est donc un parallélogramme.

4. Soit  $X_{q_r} Y_{q_r}$  une suite de divisions, telle que  $(0, a; 0, a)$  soit décomposé par  $X_{q_r} Y_{q_r}$  en  $q_r^2$  carrés. On conclut aisément, que cette suite peut être telle qu'elle soit pour  $f^{(h)}$  ( $h = 1, 2, 3$ ) ce que la suite du Chap. IX était pour  $f$ , c'est à dire qu'elle achève la quadrature de ces trois surfaces.

Elle peut de plus être telle que pour  $\varepsilon_r > 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_r = 0$ .

$$s_y(x_i) - Y_{q_r} \widehat{A_0 B_0} < \varepsilon_r \quad (i = 0, 1, \dots, q_r - 1).$$

$$s_x(y_j) - X_{q_r} \widehat{A_0 D_0} < \varepsilon_r \quad (j = 0, 1, \dots, q_r - 1).$$

$$s_y(x_i) - Y_{q_r} D_0 C_0 < \varepsilon_r \quad (i = 1, 2, \dots, q_r).$$

$$s_x(y_j) - X_{q_r} B_0 C_0 < \varepsilon_r \quad (j = 1, 2, \dots, q_r).$$

(Voir No. 8f. Chap. VII).

5. Pour cette suite on aura

$$X_{q_\infty} Y_{q_\infty} [(A_0 B_0' C_0 D_0) - (A_0 B_0 C_0 + A_0 D_0 C_0)] = 0.$$

En effet

$$(A_0 B_0' C_0 D_0) - (A_0 B_0 C_0 + A_0 D_0 C_0) = A_0 B_0' C_0 - A_0 B_0 C_0.$$

En considérant le tétraèdre dont les sommets sont  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $B_0'$ ,  $C_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} |A_0 B_0' C_0 - A_0 B_0 C_0| &\leq A_0 B_0' B_0 + C_0 B_0' B_0 \\ &< (\overline{A_0 B_0} + \overline{C_0 B_0}) \cdot \overline{B_0' B_0}. \end{aligned}$$

Mais  $f^{(h)}$  satisfaisant à la condition de LIPSCHITZ, on a:

$$A_0 B_0 + C_0 B_0 \leq \frac{1}{q_r},$$

d'ailleurs

$$\overline{B_0' B_0} \leq \overline{B^{(1)'} B^{(1)}} + \overline{B^{(2)'} B^{(2)}} + \overline{B^{(3)'} B^{(3)}},$$

et on a vu, dans le Chap. IX que

$$X_{q_\infty} Y_{q_\infty} \frac{1}{q_r} \cdot B^{(h)'} B^{(h)} = 0.$$

6. Considérons un rectangle intérieur à  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$  et dont les côtés sont parallèles aux axes  $x, y$ . Considérons la

portion  $\mathcal{A}_{i,j}^{(1)}$  du  $\mathcal{A}_s$  (Chap. I) qui corresponde à la partie de  $\mathcal{A}_s^{(3)}$ , dont la projection, sur le plan  $xy$ , est le rectangle considéré.

Nous prendrons, dans ce qui suit,  $s$  aussi grand pour que les constructions que nous aurons à faire sur  $\mathcal{A}_s$  soient légitimes.

La surface formée par  $\theta_{i,j}^{(1)}$ ,  $\theta_{i,j}^{(2)}$ ,  $\theta_{i,j}^{(3)}$ ,  $\theta_{i,j}^{(4)}$  et par  $A_0B_0B'_0$ ,  $B_0B'_0C_0$  a une connexion comme une zone de sphère. Le contour de  $R_{i,j}$  et de  $A_0B_0'C_0D_0$  sont ses contours.

On peut évidemment inscrire à cette surface une surface polyédrale  $\mathcal{A}_{i,j}^{(2)}$  de la même connexion et telle que l'un de ses contours soit aussi près que l'on veut de celui de  $R_{i,j}$ , tandis que l'autre soit  $A_0B_0'C_0D_0$ .

De plus on peut construire  $\mathcal{A}_{i,j}^{(2)}$  de telle manière qu'en le décomposant en six portions correspondantes à  $\theta_{i,j}^{(1)}$ ,  $\theta_{i,j}^{(2)}$ ,  $\theta_{i,j}^{(3)}$ ,  $\theta_{i,j}^{(4)}$ ,  $A_0B_0B'_0$ ,  $B_0B'_0C_0$ , ces six portions se confondent presque respectivement avec leurs portions correspondantes.

On peut joindre  $\mathcal{A}_{i,j}^{(1)}$  et  $\mathcal{A}_{i,j}^{(2)}$  par certaines faces  $\mathcal{A}_{i,j}^{(3)}$ , telles que la surface polyédrale ainsi obtenue soit simplement connexe.

Considérons le polyèdre  $\mathcal{A}_s^{(3)}$ . Soit  $\mathcal{A}'$  la portion située au-dessus du rectangle inscrit dans  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ .

Le polyèdre  $\mathcal{A}_s^{(3)}$  est simplement connexe (Chap. I); donc, au voisinage de son seul contour, on peut mener sur lui une ligne, telle qu'elle découpe ce polyèdre en deux portions: l'une  $\mathcal{A}''$  qui contient le contour primitif a une connexion comme une zone de la sphère, l'autre est à connexion simple et contient  $\mathcal{A}'$ .

Soit  $\mathcal{A}'''$  la portion de  $\mathcal{A}_s^{(3)}$  qui établit la connexion entre  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{A}''$ .

On voit que  $\mathcal{A}_{i,j}^{(1)}$ ,  $\mathcal{A}_{i,j}^{(2)}$ , sont équivalents à  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}''$  au point de vue de la géométrie de situation; il existe donc un  $\mathcal{A}_{i,j}^{(3)}$  qui corresponde, au point de vue de la géométrie de situation, à  $\mathcal{A}'''$  et la réunion de  $\mathcal{A}_{i,j}^{(1)}$ ,  $\mathcal{A}_{i,j}^{(2)}$ ,  $\mathcal{A}_{i,j}^{(3)}$  est une surface polyédrale simplement connexe ayant  $A_0B_0'C_0D_0$  pour contour.

En prenant le contour du rectangle inscrit dans  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$  assez près de celui de  $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ , on peut construire  $\mathcal{A}_{i,j}^{(3)}$  de telle manière qu'il soit contenu dans un voisinage aussi rapproché que l'on veut du contour de  $R_{i,j}$ .\*

\* Ce voisinage est formé par des sphères ayant pour rayon une longueur aussi petite que l'on veut, et pour centres les points du contour de  $R_{i,j}$ . La longueur de ce contour étant finie, la projection orthogonale de l'ensemble

Projetons orthogonalement les points de la surface polyédrale reunion de  $\mathcal{A}_{i,j}^{(1)}$ ,  $\mathcal{A}_{i,j}^{(2)}$ ,  $\mathcal{A}_{i,j}^{(3)}$ , sur le plan  $A_0 B_0' C_0 D_0$ .

Cette projection remplit évidemment l'aire de  $A_0 B_0' C_0 D_0$ . Mais la partie de la projection qui appartient aux points de  $\mathcal{A}_{i,j}^{(1)}$  est au plus égale à l'aire  $\mathcal{A}_{i,j}^{(1)} t$  de  $\mathcal{A}_{i,j}^{(1)}$ .

La partie de la projection qui appartient aux points de  $\mathcal{A}_{i,j}^{(2)}$  et au plus égale à (voir No. 20 Chap. III).

$\theta'_{i,j} + \theta''_{i,j} + \theta'''_{i,j} + \theta''''_{i,j} + A_0 B_0' B_0 + B_0' B_0 C_0$  + une quantité positive aussi petite que l'on veut.

La partie de la projection qui appartient aux points de  $\mathcal{A}_{i,j}^{(3)}$  est aussi petite que l'on veut.

Donc

$$(A_0 B_0' C_0 D_0) \leq \mathcal{A}_{i,j}^{(1)} t + \theta'_{i,j} + \theta''_{i,j} + \theta'''_{i,j} + \theta''''_{i,j} + A_0 B_0' B_0 + B_0' B_0 C_0 + \delta_{i,j}, \quad (A)$$

en désignant par  $\delta_{i,j}$  une quantité positive aussi petite que l'on veut.

Mais

$$X_{q_r} Y_{q_r} \mathcal{A}_{i,j}^{(1)} t \leq \mathcal{A}_s t.$$

$$\theta'_{i,j} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} A_0 B_0^{\frac{3}{2}} (A_0 B_0 - A_0 B_0)^{\frac{1}{2}}, A_0 B_0 < \frac{m}{q_r}.$$

$$Y_{q_r} (A_0 B_0 - A_0 B_0) < \varepsilon_r.$$

Donc (voir Chap. VIII. IV).

$$X_{q_r} Y_{q_r} \theta'_{i,j} < \varepsilon_r^{\frac{1}{2}}$$

et ainsi

$$X_{q_r} Y_{q_r} (\theta'_{i,j} + \theta''_{i,j} + \theta'''_{i,j} + \theta''''_{i,j}) = 0.$$

De plus (No. 5)

$$X_{q_r} Y_{q_r} (A_0 B_0' B_0 + B_0' B_0 C_0) = 0,$$

et

$$X_{p_{\infty}} Y_{q_{\infty}} \delta_{i,j} = 0.$$

Donc, d'après (A), les valeurs limites de la suite des valeurs

$$X_{q_r} Y_{q_r} (A_0 B_0' C_0 D_0),$$

ou, ce qui d'après le No. 5 revient au même, les valeurs limites de la suite de valeurs

$$X_{q_r} Y_{q_r} (A_0 B_0 C_0 + A_0 D_0 C_0)$$

de ces sphères sur un plan quelconque a une mesure extérieure aussi petite que l'on veut.

sont au plus égales à la plus petite des  $\lim \mathcal{A}_s t$  (la suite  $\mathcal{A}_s$  pouvant être quelconque).

Mais la suite des polyèdres dont le  $r$ -ième est formé par les  $2q_r^2$  faces  $A_0 B_0 C_0$ ,  $A_0 D_0 C_0$  est un élément de l'ensemble VI du Chap. I.

Donc

$$T_1 = T_6 = X_{q_\infty} Y_{q_\infty} (A_0 B_0 C_0 + A_0 D_0 C_0) = X_{q_\infty} Y_{q_\infty} (A_0 B_0' C_0 D_0).$$

Désignons par  $\lambda_x^{(h)}$ ,  $\lambda_y^{(h)}$  les nombres dérivés de  $f^{(h)}$ . Lorsque  $\lambda_x^{(h)}$ ,  $\lambda_y^{(h)}$ , ( $h = 1, 2, 3$ ) sont intégrables on trouve, à l'aide de  $A_0 B_0' C_0 D_0$  que

$$T_1 = T_6 = \int_0^a \int_0^a [(\lambda_x^{(1)} \cdot \lambda_y^{(2)} - \lambda_x^{(2)} \lambda_y^{(1)})^2 + (\lambda_x^{(1)} \lambda_y^{(3)} - \lambda_y^{(1)} \lambda_x^{(3)})^2 + (\lambda_x^{(2)} \lambda_y^{(3)} - \lambda_x^{(3)} \lambda_y^{(2)})^2]^{\frac{1}{2}} \cdot dx \cdot dy.$$

et on a 96 fonctions ayant l'aire pour intégrale.

On a encore

$$T_1 = T_6 = XY(A_0 B_0 C_0 + A_0 D_0 C_0) = XY(A_0 B_0' C_0 D_0).$$

On étend, facilement avec l'aide du No. 8f. du Chap. VII les résultats obtenus, à la surface rectifiable générale. On obtient dans un cas tout spécial (en changeant  $x$  et  $y$  en  $u$  et  $v$ ) le théorème et la formule classique

$$T_1 = T_6 = XY(A_0 B_0 C_0 + A_0 D_0 C_0) = XY(A_0 B_0' C_0 D_0) \\ = \int_0^a \int_0^b (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} \cdot du \cdot dv.$$

*Vu et approuvé:*

Paris, le 13 juin 1908.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

P. APPELL.

*Vu et permis d'imprimer:*

Paris, le 13 juin 1908.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

## SECONDE THÈSE.

---

### PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ. LIBRATION DE LA LUNE.

---

*Vu et approuvé:*

Paris, le 13 juin 1908.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

P. APPELL.

*Vu et permis d'imprimer:*

Paris, le 13 juin 1908.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.





